CHAPITRE 1

LES NOMBRES COMPLEXES, ALGÈBRE, ANALYSE, GÉOMÉTRIE

D'après un cours de Mr Trépreau. [1]

1.1. Une construction de $\mathbb{C}$

Imaginons un corps commutatif $\mathbf{F}$ tel que le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels soit contenu dans $\mathbf{F}$ et soit un sous-corps de $\mathbf{F}$. Imaginons encore qu'il existe un élément $i \in \mathbf{F}$ tel que $i^2 = -1$. L'ensemble des combinaisons linéaires

$$z = x + yi, \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

est un sous-espace vectoriel $\mathbb{C}$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbf{F}$. Comme -1 n'est pas un carré dans $\mathbb{R}$, $i \notin \mathbb{R}$, donc $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

En particulier, $\mathbb{C}$ est un sous-groupe du groupe additif $\mathbf{F}$. D'autre part, les règles de calcul dans un anneau commutatif donnent, pour tout $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$:

$$(x + yi)(x' + y'i) = xx' + (xy' + x'y)i + yy'i^2 = (xx' - yy') + (xy' + x'y)i, \tag{1}$$

un élément de $\mathbb{C}$: $\mathbb{C}$ est un sous-anneau de $\mathbf{F}$. On a en particulier :

$$(x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Si $x + yi \neq 0$, $x^2 + y^2 \neq 0$ et l'inverse de $x + yi$ vaut :

$$\frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{(x - yi)(x + yi)} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}\, i, \tag{2}$$

un élément de $\mathbb{C}$: $\mathbb{C}$ est un sous-corps de $\mathbf{F}$.

Donc, s'il existe un corps commutatif $\mathbf{F}$ qui a les propriétés requises, il en existe un, $\mathbb{C}$, qui est de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. Mieux, si un tel corps existe, la loi produit sur $\mathbb{C}$ est donnée par (1) et l'inverse d'un élément non nul de $\mathbb{C}$ par (2). L'existence d'un corps tel que $\mathbb{C}$ est maintenant une question de vérifications.

On laisse au lecteur le soin de construire un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, qui contienne $\mathbb{R}$ comme sous-espace.

1. http ://www.licence.math.upmc.fr/UE/LM366/

Définition 1.1.1. — $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$, qui contient $\mathbb{R}$ comme sous-espace, et est muni d'un élément distingué $i \notin \mathbb{R}$ et de la loi de composition interne (produit, ou multiplication) définie par :

$$(x+yi)(x'+y'i) = (xx'-yy') + (xy'+x'y)i,$$

pour tout x, y, x', $y' \in \mathbb{R}$.

Théorème 1.1.2. — *$(\mathbb{C}, +, .)$ est un corps commutatif; $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$; -1 a exactement deux racines carrées dans $\mathbb{C}$, i et $-i$. On note $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Démonstration. — Le lecteur vérifiera que la loi produit est commutative, associative, distributive par rapport à l'addition, que 1 est élément neutre et que

$$\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

est (un, donc) l'inverse de $x+yi$, si $x, y \in \mathbb{R}$ ne sont pas tous les deux nuls. □

L'existence d'un corps tel que $\mathbb{C}$ n'a rien de banal. On peut montrer (noter que si K est un sous-corps commutatif d'un corps L, L est naturellement un espace vectoriel sur K) le résultat suivant :

Théorème 1.1.3. — *Soit K un corps commutatif. On suppose que $\mathbb{R}$ est un sous-corps de K et que K est de dimension finie n sur $\mathbb{R}$. Alors, ou bien $n = 1$ et $K = \mathbb{R}$, ou bien $n = 2$ et K est isomorphe à $\mathbb{C}$.*

Si l'on supprime la condition que le corps K soit commutatif, il existe un dernier exemple : le *corps des quaternions*, qui est de dimension 4 sur son sous-corps $\mathbb{R}$.

1.2. Vocabulaire et notations

Un élément $z \in \mathbb{C}$ s'appelle un *nombre complexe*. Sa décomposition

$$z = x + yi \qquad \text{ou} \qquad z = x + iy, \qquad x, y \in \mathbb{R},$$

dans la *base canonique* $\{1, i\}$ est l'écriture de z *sous forme canonique*; x est la *partie réelle*, y la *partie imaginaire* de z. On note :

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

Le *conjugué* de z est défini par :

$$\overline{z} = x - iy.$$

On a donc les formules :

$$z = \operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z, \ \ \overline{z} = \operatorname{Re} z - i\operatorname{Im} z; \qquad \operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}, \ \ \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

On dit que z est *imaginaire pur* si $\operatorname{Re} z = 0$. *Quand on écrira $x + iy$, il sera sous-entendu que x et y sont réels.*

Théorème 1.2.1. — *La conjugaison complexe $z \mapsto \overline{z}$ est un automorphisme du corps $\mathbb{C}$. C'est une involution. Elle induit l'identité sur $\mathbf{R}$.*

Démonstration. — Simples vérifications. □

Réciproquement, si un automorphisme u du corps $\mathbb{C}$ induit l'identité sur $\mathbb{R}$:

$$u(x+iy) = u(x) + u(i)u(y) = x + u(i)y,$$

avec $u(i)^2 = u(i^2) = -1$ et donc :

$$u(i)^2 + 1 = u(i)^2 - i^2 = (u(i) - i)(u(i) + i) = 0.$$

Ceci montre que $u(i) \in \{-i, +i\}$, donc que u est l'identité ou la conjugaison.

Le produit $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ est un réel positif. Le *module* de $z \in \mathbb{C}$ est le nombre réel positif défini par :

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

On se souviendra que si $z \neq 0$, la formule

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

donne l'écriture de $1/z$ sous forme canonique. On vérifie qu'on a :

Théorème 1.2.2. — *L'application module $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$, qui induit la valeur absolue sur $\mathbb{R}$. Elle est multiplicative : $|z\,z'| = |z|\,|z'|$ pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$.*

Soit $x + iy$ un nombre complexe de module 1. On a :

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{3}$$

La trigonométrie nous apprend que, si $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient l'équation (3), il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \tag{4}$$

et que si $t \in \mathbb{R}$ est une solution de (4), la solution générale est $t + k2\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$. On note :

$$t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^{it} = \cos t + i \sin t. \tag{5}$$

La notation est justifiée par la *formule de Moivre* :

$$\forall t, t' \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^{it}\,\mathrm{e}^{it'} = \mathrm{e}^{i(t+t')},$$

qui est une conséquence des formules de trigonométrie très classiques :

$$\cos(t + t') = \cos t \cos t' - \sin t \sin t', \qquad \sin(t + t') = \sin t \cos t' + \cos t \sin t'.$$

Plus généralement, si z est un nombre complexe *non nul*, $z/|z|$ est un nombre complexe de module 1, donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z = |z|\frac{z}{|z|} = |z|(\cos t + i \sin t) = |z|\mathrm{e}^{it}.$$

Le nombre t est appelé *un argument* de z et l'écriture ci-dessus une écriture de z *sous forme trigonométrique* ; 0 n'a pas d'argument. Par exemple,

$$-1 = \mathrm{e}^{i\pi}, \qquad i = \mathrm{e}^{i\pi/2}$$

sont des écritures de -1 et de i sous forme trigonométrique.

Un nombre complexe non nul a une infinité d'arguments, qui diffèrent d'un multiple de 2π. Il est d'usage de noter $\arg z$ l'un quelconque des arguments de $z \in \mathbb{C}^*$, mais *il est très important de se souvenir que* arg *n'est pas une fonction* ! On écrira sans danger, pour $z, z' \in \mathbb{C}^*$:

$$\arg zz' \equiv \arg z + \arg z' \ \text{ modulo } 2\pi, \quad \arg z/z' \equiv \arg z - \arg z' \ \text{ modulo } 2\pi.$$

Ce sont deux formules fondamentales pour l'application des nombres complexes à la géométrie.

1.3. Le Théorème de d'Alembert-Gauss

Le théorème suivant est l'un des théorèmes les plus importants de toutes les mathématiques classiques (dans les manuels de langue anglaise, on l'appelle le *théorème fondamental de l'algèbre*).

***Théorème 1.3.1* (d'Alembert-Gauss).** — *Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.*

Cela signifie que tout polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré ≥ 1 possède une racine.

Ce théorème a les conséquences suivantes, qu'il faut connaître et savoir démontrer [2] :

1. Un polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ de degré $n \geq 0$ a exactement n racines, compte tenu de leurs multiplicités. Il s'écrit $P(z) = a_n(z - z_1)\dots(z - z_n)$ et l'écriture est unique à l'ordre près des facteurs.
2. Une fraction rationnelle $R \in \mathbb{C}(z)$ est combinaison linéaire de monômes z^p et d'éléments simples de première espèce $1/(z-a)^p$ ($a \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}^*$).
3. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ de degré $n \geq 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[x]$ si et seulement si $n = 1$, ou que $n = 2$ et que P n'a pas de zéro réel.

Le dernier énoncé est « purement réel » . Il en existe des démonstrations (je ne les connais pas) qui n'utilisent pas les nombres complexes, mais elles sont très complexes ! C'est un exemple d'une application de « l'algèbre complexe » à « l'algèbre réelle ». On verra que « l'analyse complexe » a des applications à « l'analyse réelle ».

Le Théorème 1.3.1 va être une conséquence du lemme suivant :

Lemme 1.3.2. — *Soit $P \in \mathbb{C}[z]$ et $a \in \mathbb{C}$. Si $z \mapsto |P(z)|$ a un minimum local en $z = a$, ou bien P est constant, ou bien $P(a) = 0$.*

Cet énoncé n'a pas d'analogue sur $\mathbb{R}$: le polynôme $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 + 1$ a un minimum non nul en $x = 0$. Comme l'affirme le lemme, la fonction $\mathbb{C} \ni z \mapsto f(z) = |z^2 + 1|$ n'en a pas : on a $f(iy) = |1 - y^2| < f(0)$ si $-1 < y < 1$.

Démonstration. — On suppose $P(a) \neq 0$ et que P n'est pas constant. On considère le comportement de $P(a + r\mathrm{e}^{i\theta})$ quand $r \to 0^+$, pour θ bien choisi. Par hypothèse, il existe un entier $p \geq 1$ et $u \neq 0$ tel qu'on ait [3] :

$$\frac{P(a+h)}{P(a)} = 1 + uh^p + |h|^p \epsilon(h).$$

Soit $u = |u|\mathrm{e}^{i\theta_0}$ (forme trigonométrique). On a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ fixé :

$$\frac{P(a + r\mathrm{e}^{i\theta})}{P(a)} = 1 + |u| r^p \mathrm{e}^{i(p\theta+\theta_0)} + r^p \epsilon(r).$$

2. C'est le moment de réviser vos connaissances sur les polynômes et les fractions rationnelles à coefficient dans un corps commutatif, en particulier $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3. On note $\epsilon(\cdot)$ toute fonction définie au voisinage épointé de 0 (dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$ selon le contexte) et qui tend vers 0 avec son argument *i.e.* pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\rho > 0$ tel que $0 < |h| < \rho \Rightarrow |\epsilon(h)| < \epsilon$.

On choisit $\theta = \pi/p - \theta_0/p$, pour obtenir :

$$\frac{P(a + r\mathrm{e}^{i\theta})}{P(a)} = 1 - |u|r^p + r^p\epsilon(r),$$

et donc

$$\left|\frac{P(a + r\mathrm{e}^{i\theta})}{P(a)}\right| \leq 1 - |u|r^p + r^p\epsilon(r) < 1$$

si $r > 0$ est assez petit. D'où le lemme. □

Démonstration du Théorème de d'Alembert-Gauss. — Soit

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, z^k$$

un polynôme de degré $n \geq 1$. Posons :

$$m = \inf_{z \in \mathbf{C}} |P(z)| \in [0, +\infty[.$$

Lorsque $|z|$ est suffisamment grand, on a :

$$|P(z)| \geq |a_n||z|^n \left|1 - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k/a_n||z|^{k-n}\right|.$$

Il existe $R > 0$ tel que le deuxième facteur soit $\geq 1/2$ si $|z| \geq R$; alors $|P(z)| \geq |a_n|R^n/2$. En choisissant R encore plus grand, on obtient :

$$|z| \geq R \;\Rightarrow |P(z)| > m,$$

donc

$$m = \inf_{|z| \leq R} |P(z)|.$$

La fonction $z \mapsto |P(z)|$ est continue sur le disque $\{|z| \leq R\}$ fermé et borné dans $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, donc compact. Par théorème, la fonction $z \mapsto |P(z)|$ *atteint* son infimum m en un point $a \in \overline{D}(0, R)$. D'après le lemme précédent, $m = 0$, donc a est une racine de P.

1.4. Nombres complexes et géométrie

En tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{R}^2$ *via* :

(6) $$(x, y) \mapsto x + iy.$$

Dans cet isomorphisme, $|x + iy| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ correspond à la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^2$. L'écriture $z = r\mathrm{e}^{it}$ correspond à l'écriture d'un vecteur en coordonnées polaires :

$$(x, y) = (r\cos t, r\sin t).$$

Comme les éléments de $\mathbb{R}^2$, les nombres complexes ont une double interprétation géométrique, comme vecteurs ou comme points.

1.4.1. Le $\mathbb{R}$-plan vectoriel euclidien $\mathbb{C}$. — Dans ce paragraphe, on voit $\mathbb{C}$ comme un espace vectoriel euclidien de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. La base canonique $\{1, i\}$ définit un isomorphisme entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$: $1 \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $i \mapsto \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $z = x + iy \mapsto \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. La base duale de $\{1, i\}$ est donnée par les formes $\mathbb{R}-$linéaires $z \mapsto \operatorname{Re} z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$, $z \mapsto \operatorname{Im} z = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$.

Théorème 1.4.1. — *Soit $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *u est $\mathbb{C}$-linéaire,*
2. *$u(i) = iu(1)$,*
3. *La matrice de u dans la base canonique est de la forme $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$*
4. *ou bien $u = 0$, ou bien u est une similitude vectorielle directe.*

Démonstration. — Une application $\mathbb{C}$-linéaire $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est de la forme :

$$u(z) = \lambda z,$$

où $\lambda = u(1) \in \mathbb{C}$. Cette application $\mathbb{C}-$linéaire est a fortiori $\mathbb{R}-$linéaire. Si $\lambda = a + ib$, avec a, $b \in \mathbb{R}$, alors la matrice dans la base $\{1, i\}$ de $z = x + yi \mapsto \lambda.z = (ax - by) + (bx + ay)i$ est

$$\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$$

Si $u(1) \neq 0$, on écrit $u(1) = re^{it}$ (forme trigonométrique) et la matrice de u dans la base canonique $\{1, i\}$ est :

$$\begin{pmatrix}r\cos t & -r\sin t\\ r\sin t & r\cos t\end{pmatrix}$$

C'est la matrice d'une similitude vectorielle directe, le produit commutatif de l'homothétie vectorielle de rapport r et de la rotation d'angle t. Le déterminant de la matrice est strictement positif : on dit que u conserve l'orientation. Une telle transformation ne conserve pas la norme (mais elle conserve les proportions) ; elle conserve les angles orientés de vecteurs.

Réciproquement, soit $u : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une application $\mathbb{R}$-linéaire de matrice dans la base canonique $\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. On a :

$$u(x + iy) = xu(1) + yu(i) \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$

Cette application est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si elle est de la forme multiplication par le nombre complexe $u(1)$:

$$u(x + iy) = (x + iy)u(1) = xu(1) + yiu(1) \text{ pour tout } x, y \in \mathbb{R},$$

donc si et seulement si $u(i) = iu(1)$, si et seulement si $a = d$ et $b = -c$. □

1.4.2. $\mathbb{C}$ et la géométrie plane. — Enfin, on voit $\mathbb{C}$ comme plan de la géométrie plane élémentaire, ou géométrie affine euclidienne plane. La distance entre deux points $z, z' \in \mathbb{C}$ est donnée par :

$$d(z, z') = |z - z'|.$$

Soit $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}$ et considérons l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$T(z) = az + b. \tag{7}$$

On vérifie que l'ensemble des transformations de la forme (7) est un sous-groupe du groupe des bijections de $\mathbb{C}$.

Si $a = 1$, T est la translation de vecteur b. Si $b = 0$, on obtient l'interprétation géométrique de T en écrivant $a = k\mathrm{e}^{i\phi}$, $z = r\mathrm{e}^{it}$ (forme trigonométrique). On a :

$$T(z) = kr\mathrm{e}^{i(t+\phi)}\,;$$

T est la similitude (directe) de centre 0, de rapport $k = |a|$ et d'angle ϕ, un argument de a.

Dans le cas général on résout l'équation aux points fixes :

$$T(z) = z.$$

Si $a \neq 1$, elle a une seule solution $z_0 = b/(1 - a)$, qui est donc le seul point fixe de T ; on obtient :

$$T(z) - z_0 = a(z - z_0)\,;$$

T est la similitude de centre z_0, de rapport $|a|$ et d'angle un argument de a.

Rappelons qu'en géométrie *on appelle similitude directe toute bijection du plan qui est soit une translation, soit une similitude directe à centre.* On a donc :

Théorème 1.4.2. — *Le groupe des transformations $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la forme $z \mapsto T(z) = az + b$, $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, s'identifie au groupe des similitudes directes du plan. Si $b \neq 0$, T est une similitude à centre, sinon T est une translation.*

1.5. L'analyse complexe

L'analyse complexe commence avec la définition suivante :

Définition 1.5.1. — Soit Ω un voisinage de $a \in \mathbb{C}$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-*dérivable* en $a \in \Omega$ si le quotient :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a une limite $\in \mathbb{C}$ quand $h \in \mathbb{C}^*$ tend vers 0. Dans ce cas, on dit que cette limite est la $\mathbb{C}$-dérivée de f en a et on la note $f'(a)$.

Autrement dit, f est $\mathbb{C}$-dérivable en a de $\mathbb{C}$-dérivée $f'(a)$ si, *pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\rho > 0$, tel que*

$$0 < |h| < \rho \;\Rightarrow\; \left|\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a)\right| < \epsilon.$$

Si $h = re^{it}$ la condition porte sur $|h| = r$. De façon analogue au cas des fonctions d'une variable réelle, il revient au même de dire que f a un développement limité de la forme :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + |h|\epsilon(h)$$

où $\epsilon(.)$ est une fonction définie au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$ et $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$.

Exemple 1.5.2. —

1) $f : z \mapsto z$ est $\mathbb{C}$ −dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$ car $\dfrac{(z_0+h)-z_0}{h} = 1$. De plus $f'(z_0) = 1$.

2) $f : z \mapsto z^2$ est $\mathbb{C}$ −dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$ car $\dfrac{(z_0+h)^2 - z_0^2}{h} = 2z_0 + h$. De plus $f'(z_0) = 2z_0$.

3) $f : z \mapsto \bar{z}$ n'est pas $\mathbb{C}$ −dérivable en $z_0 \in \mathbb{C}$ car $\dfrac{\overline{z_0+h} - \overline{z_0}}{h} = \dfrac{\bar{h}}{h}$ n'a pas de limite quand h tend vers 0. En effet si une fonction g définie sur un voisinage épointé $D(0,r) \setminus \{0\}$ admet une limite a en 0, on doit avoir $\lim_{h\to 0, h\in\mathbb{C}^*} g(h) = \lim_{t\to 0, t\in\mathbb{R}^*} g(te^{i\theta})$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. C'est à dire que si une limite pour h complexe tendant vers 0 existe, alors la limite suivant une droite affine passant par 0 doit existée et être égale à a. Dans notre cas $g(te^{i\theta}) = e^{-2i\theta}$ dépend de la direction d'approche.

1.5.1. Rappels. — Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dérivable (ou différentiable) en a au sens de l'analyse réelle s'il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire

$$T_a f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

(on réserve la notation usuelle $f'(a)$ à la $\mathbb{C}$-dérivée, si elle existe) telle qu'on ait :

$$f(a+h) = f(a) + T_a f(h) + |h|\epsilon(h) \ ,$$

où $\epsilon(.)$ est une fonction définie au voisinage de 0 et $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$. L'application linéaire $T_a f$ s'appelle la dérivée, ou la différentielle, ou encore l'application linéaire tangente de f au point a.

Théorème 1.5.3. — *Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est $\mathbb{C}$-dérivable en a,*
2. *f est dérivable en a et sa différentielle $T_a f$ est $\mathbb{C}$-linéaire.*

Dans ce cas, $T_a f$ est l'aplication $h \mapsto f'(a)h$.

Démonstration. — Il est clair que si f est $\mathbb{C}$-dérivable en a, elle est dérivable en a de dérivée :

$$h \mapsto T_a f(h) = f'(a)h,$$

qui est une application $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Réciproquement, si $T_a f$ est $\mathbb{C}$-linéaire, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $T_a f(h) \equiv ch$ donc f est $\mathbb{C}$-dérivable en a et $f'(a) = c$. □

L'isomorphisme entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ définie par la base canonique permet, comme pour le cas des applications linéaires, d'interpréter la $\mathbb{C}$-dérivabilité de f en terme de ses dérivées partielles et de la matrice jacobienne de f dans cette base. À une fonction f d'une partie Ω de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, on associe une fonction F de deux variables réelles (x, y), et à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie

par $F(x,y) = f(x+iy)$. On notera P sa partie réelle et Q sa partie imaginaire. Les dérivées partielles, en $a = x_a + iy_a$, de la fonction f par rapport aux variables réelles x et y seront définies, si elles existent, par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_a,y_a) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_a,y_a) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_a,y_a) = \lim_{\text{t réel, } t\to 0} \frac{f(a+t)-f(a)}{t},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_a,y_a) = \frac{\partial P}{\partial y}(x_a,y_a) + i\frac{\partial Q}{\partial y}(x_a,y_a) = \lim_{\text{t réel, } t\to 0} \frac{f(a+it)-f(a)}{t}.$$

La matrice jacobienne de f au point a dans la base $\{1,i\}$ est donc

$$\mathrm{Mat}_{\{1,i\}} T_a f = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x}(x_a,y_a) & \frac{\partial P}{\partial y}(x_a,y_a) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_a,y_a) & \frac{\partial Q}{\partial y}(x_a,y_a) \end{pmatrix}.$$

Si f est dérivable en a, en notant $h = k + il$ (forme canonique), on a :

$$T_a f(k+il) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)k + \frac{\partial f}{\partial y}(a)l$$
$$T_a f(h) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)h + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)\overline{h},$$

car $k = (h+\overline{h})/2$, $l = (h-\overline{h})/2i$. Notons que l'application $T_a f$ est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si le coefficient de $\overline{h}$ est nul.

Définition 1.5.4. — Soit Ω un voisinage de $a \in \mathbb{C}$. Si la fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dérivable (au sens réel) en a, on pose :

$$\frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) - i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) + i\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right). \tag{8}$$

Théorème 1.5.5. — *Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est $\mathbb{C}$-dérivable en a,*
2. *f est dérivable en a et sa différentielle $T_a f$ est $\mathbb{C}$-linéaire.*
3. *f est dérivable en a et vérifie l'équation, dite de Cauchy-Riemann :*

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(a) = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial y}(a) = i\frac{\partial f}{\partial x}(a). \tag{9}$$

4. *f est dérivable en a et vérifie les équations, dites de Cauchy-Riemann*

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_a,y_a) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x_a,y_a) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_a,y_a) &= -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_a,y_a). \end{cases}$$

De plus, *si f est $\mathbb{C}$-dérivable en a*, on a les relations :

$$f'(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

Démonstration. — Supposons que f est dérivable en a. Alors $T_af(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $T_af(i) = \frac{\partial f}{\partial y}(a)$, de sorte que f est $\mathbb{C}$ −dérivable en a ssi $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = i\frac{\partial f}{\partial x}(a)$. Ceci équivaut encore au fait que la jacobienne de f dans la base canonique est du type multiplication par le nombre complexe $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$. On obtient ainsi les conditions (réelles) de Cauchy-Riemann, équivalentes, lorsque f est dérivable, à ce qu'elle soit $\mathbb{C}$-dérivable en a :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_a, y_a) &= \frac{\partial Q}{\partial y}(x_a, y_a) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_a, y_a) &= -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_a, y_a). \end{cases}$$

□

Définition 1.5.6. — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est *holomorphe* si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de Ω. On note $\mathcal{O}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Les propriétés suivantes se démontrent comme leurs analogues en analyse réelle. On laisse au lecteur le soin de les démontrer.

1. La restriction d'une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ à un ouvert $\omega \subset \Omega$ est holomorphe sur ω.
2. Une fonction holomorphe est continue.
3. Si $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $a, b \in \mathbb{C}$, alors $(af + bg)$ et fg sont holomorphes et $(af + bg)' = af' + bg'$ et $(fg)' = fg' + f'g$. De plus, tant que g ne s'annule pas, $\frac{1}{g}$ est holomorphe et $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$.
4. Un polynôme $P \in \mathbb{C}[z]$ (respectivement une fraction rationnelle $R \in \mathbb{C}(z)$) est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (respectivement sur le complémentaire de l'ensemble de ses pôles) et sa dérivée est donnée par la formule usuelle.
5. $\mathcal{O}(\Omega)$ est une sous-algèbre de l'algèbre, qu'on notera $C^0(\Omega)$, des fonctions continues *à valeurs complexes* sur Ω.
6. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, si $g \in \mathcal{O}(\Omega')$ et si $f(\Omega) \subset \Omega'$, $g \circ f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$.

Lemme 1.5.7. — *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Soient $a, b \in U$ tels que le segment $[a, b]$ soit inclus dans U. On a alors l'inégalité des accroissements finis :*

$$|f(b) - f(a)| \leq |b - a| \sup_{p \in]a,b[} |f'(p)|.$$

Démonstration. — On se ramène à une fonction réelle de la variable réelle :

la fonction continue $[0,1] \ni t \mapsto g(t) = \mathrm{Re}[f(a+t(b-a)) - f(a)]$ est dérivable sur $]0,1[$ comme composée de fonctions différentiables et

$$g'(t) = \lim_{t\to t_0} \frac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0} = \lim_{t\to t_0} \frac{\mathrm{Re} f(a+t(b-a)) - \mathrm{Re} f(a+t_0(b-a))}{t-t_0}$$
$$= \mathrm{Re}\left((b-a)\lim_{t\to t_0} \frac{f(a+t(b-a)) - f(a+t_0(b-a))}{(t-t_0)(b-a)}\right) = \mathrm{Re}\left((b-a)f'(a+t_0(b-a))\right)$$

car $z \to \mathrm{Re}(z)$ est une fonction continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$. Donc $|g'(t_0)| \le |(b-a)f'(a+t_0(b-a))|$. L'inégalité des accroissements finis pour la fonction g entraine donc

$$|\mathrm{Re}(f(b)-f(a))| \le |b-a| \sup_{p\in]a,b[} |f'(p)| \,.$$

Cette inégalité est vraie pour toute fonction holomorphe définie au voisinage du segment $[a,b]$. Choisissons $\theta \in [0,2\pi]$ telle que $e^{i\theta}(f(b)-f(a))$ soit réel, et appliquons cette inégalité à la fonction holomorphe $e^{i\theta} f$. On obtient

$$|f(b)-f(a)| = |e^{i\theta}(f(b)-f(a))| = |\mathrm{Re}(e^{i\theta}f(b) - e^{i\theta}f(a))| \le |b-a| \sup_{p\in]a,b[} |e^{i\theta}f'(p)| \,.$$

□

Remarque 1.5.8. — On montrera dans le cours qu'une fonction holomorphe est infiniment dérivable de sorte que $\sup_{p\in]a,b[} |f'(p)| = \max_{p\in[a,b]} |f'(p)|$ est fini.

Proposition 1.5.9. — *Si Ω est connexe, toute fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $f' = 0$ est constante.*

La notion d'ouvert connexe est rappelée dans le dernier paragraphe de ce chapitre.

Démonstration. — Fixons arbitrairement un point $p_0 \in \Omega$ et montrons que $f^{-1}(\{f(p_0)\}) = \Omega$:

1) $f^{-1}(\{f(p_0)\})$ est non vide.
2) f étant continue sur Ω, $f^{-1}(\{f(p_0)\})$ est fermé dans Ω.
3) Montrons que cet ensemble est ouvert dans Ω : Si $p \in f^{-1}(\{f(p_0)\})$, comme Ω est ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que $D(p,\epsilon) \subset \Omega$. $\forall p' \in D(p,\epsilon)$, $[p,p'] \subset \Omega$, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis : $\forall p' \in D(p,\epsilon)$, $|f(p') - f(p)| \le |p'-p|.0 = 0$ par hypothèse. Donc $D(p,\epsilon) \subset f^{-1}(\{f(p_0)\})$ et cet ensemble est voisinage de chacun de ces points.

L'ensemble $f^{-1}(\{f(p_0)\})$, non vide, ouvert et fermé dans Ω connexe, est donc égale à Ω. □

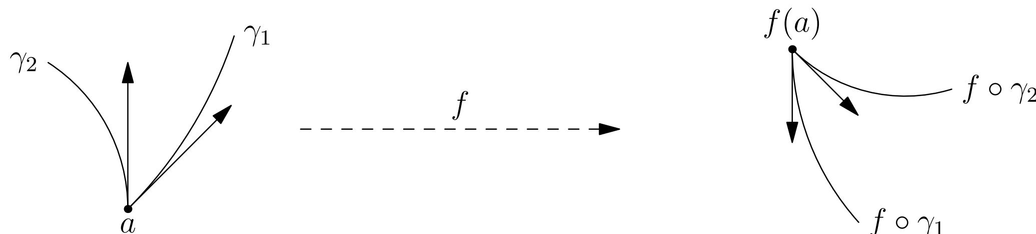
L'étude des fonctions holomorphes est l'objet de ce cours.

1.6. Applications géométriques des conditions de Cauchy-Riemann

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $a \in \Omega$; supposons que $f'(a) \neq 0$. Considérons deux courbes paramétrées $\gamma_1, \gamma_2 \colon [0,1] \to \Omega$, différentiables, telles que $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$ et $\gamma_1'(0) \neq 0$, $\gamma_2'(0) \neq 0$. Si α_1 est un argument de $\gamma_1'(0)$ et α_2 est un argument de $\gamma_2'(0)$, alors $\alpha_2 - \alpha_1$ est l'angle orienté, défini à un multiple de 2π près, des tangentes orientées de γ_1 et γ_2 en a ; notons-le ici $\mathrm{angle}(\gamma_1,\gamma_2)$ (ceci n'étant défini qu'à un multiple de 2π près, cette notation est à employer avec la même précaution que celle de l'argument). De même, notons $\mathrm{angle}(f\circ\gamma_1, f\circ\gamma_2)$ l'angle

orienté des tangentes orientées de $f \circ \gamma_1$ et $f \circ \gamma_2$ en $f(a)$. La formule de dérivation des fonctions composées donne : $(f \circ \gamma_1)'(0) = f'(a) \cdot \gamma_1'(0)$ et $(f \circ \gamma_2)'(0) = f'(a) \cdot \gamma_2'(0)$. Si α est un argument de $f'(a)$, alors $\alpha_1 + \alpha$ et $\alpha_2 + \alpha$ sont des arguments respectifs de $(f \circ \gamma_1)'(0)$ et $(f \circ \gamma_2)'(0)$. Donc $\mathrm{angle}(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2)$ vaut $\alpha_2 + \alpha - (\alpha_1 + \alpha)$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{angle}(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2) \equiv \mathrm{angle}(\gamma_1, \gamma_2) \quad \text{modulo } 2\pi.$$



Autrement dit, une application holomorphe préserve les angles, tant que sa dérivée est non nulle.

1.7. La sphère de Riemann ; homographies

Soit ∞ un élément qui n'appartient pas à $\mathbb{C}$. On définit l'ensemble

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

réunion disjointe de $\mathbb{C}$ et de ∞ ; $\hat{\mathbb{C}}$ (muni de structures qui seront introduites peu à peu) est appelé *la sphère de Riemann*. On appelle ∞ le point à l'infini de $\hat{\mathbb{C}}$, ou par abus de langage *le point à l'infini de* $\mathbb{C}$: mais ce n'est pas un point de $\mathbb{C}$!

On étend *partiellement* les opérations de $\mathbb{C}$ à $\hat{\mathbb{C}}$ en posant $a + \infty = \infty + a = \infty$ si $a \neq \infty$, $a \times \infty = \infty \times a = \infty$ si $a \neq 0$, $a/\infty = 0$ si $a \neq \infty$ et $a/0 = \infty$ si $a \neq 0$.

Si $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$, on étend le domaine de définition de l'homographie

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{10}$$

en posant :

$$T(\infty) = \frac{a}{c} \in \hat{\mathbb{C}}, \qquad T(-\frac{d}{c}) = \infty.$$

On a le résultat suivant :

Théorème 1.7.1. — *Une homographie est une application bijective de $\hat{\mathbb{C}}$ et l'application réciproque est une homographie. L'ensemble des homographies est un sous-groupe du groupe des bijections de $\hat{\mathbb{C}}$, le groupe des homographies. On le note* $\mathrm{Aut}\,(\hat{\mathbb{C}})$.

Démonstration. — Les vérifications sont laissées au lecteur. □

Exemple 1.7.2. — Les similitudes $z \mapsto az + b$, $a \neq 0$, sont les homographies qui conservent le point à l'infini. On fera attention au fait qu'une similitude considérée comme transformation de $\mathbb{C}$ a un point fixe si c'est une similitude à centre et n'en a pas si c'est une translation. Considérée comme transformation de $\hat{\mathbb{C}}$, elle a toujours le point fixe ∞.

Si, dans (10), on a $c \neq 0$, T n'est pas une similitude, mais on peut écrire :

$$T(z) = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \frac{1}{cz + d},$$

et donc $T = T_1 \circ T_0 \circ T_2$, où T_2 est la similitude $T_2(z) = cz + d$, T_0 l'involution $T_0(z) = 1/z$ et T_1 la similitude $T_1(z) = a/c + (bc - ad)z/c$.

Lemme 1.7.3. — *Le groupe des homographies est engendré par les similitudes et l'involution* $z \mapsto T_0(z) = 1/z$.

Remarque 1.7.4. — L'homographie (10) est inchangée si l'on remplace le 4-uplet (a, b, c, d) par un 4-uplet proportionnel (ka, kb, kc, kd), $k \in \mathbb{C}^*$. On dit que la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est *une* matrice de T. On vérifie facilement que si M et N sont des matrices de S et $T \in \mathrm{Aut}\,(\hat{\mathbb{C}})$ respectivement, MN est une matrice de $S \circ T$, et M^{-1} une matrice de S^{-1}.

Selon que $c = 0$, ou $a = 0$, ou que a et c sont tous les deux non nuls, en mettant a et/ou c en facteur au numérateur et au dénominateur de (10), on obtient que toute homographie peut s'écrire sous l'une des formes suivantes :

$$\text{(a)}\ \ T(z) = k(z - z_2), \qquad \text{(b)}\ \ T(z) = k\frac{1}{z - z_1}, \qquad \text{(c)}\ \ T(z) = k\frac{z - z_2}{z - z_1},$$

où $k \in \mathbb{C}^*$ et $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dans le cas (a), $T(\infty) = \infty$ et $T(z_2) = 0$; dans le cas (b), $T(z_1) = \infty$ et $T(\infty) = 0$; dans le cas (c), $T(z_1) = \infty$, $T(z_2) = 0$ et $T(\infty) = k$.

Théorème 1.7.5. — *Soit* $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ *trois points distincts. Il existe une et une seule homographie* T *telle que* $T(z_1) = \infty$, $T(z_2) = 0$ *et* $T(z_3) = 1$.

Démonstration. — On prouve d'abord l'unicité. Si deux homographies S et T envoient le 3-uplet (z_1, z_2, z_3) sur $(\infty, 0, 1)$, $S \circ T^{-1} = R$ conserve $(\infty, 0, 1)$. Comme $R(\infty) = \infty$, R est de la forme (a) ; $R(0) = 0$ donne $z_2 = 0$ et $R(1) = 1$ donne $k = 1$. Donc R est l'identité et $S = T$.

Pour l'existence, on suppose d'abord $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On utilise la forme (c) ; la condition $T(z_3) = 1$ donne la valeur de k. On obtient :

(11) $$T(z) = \frac{z - z_2}{z - z_1} / \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}.$$

Si $z_1 = \infty$, on utilise (a), et si $z_2 = \infty$, on utilise (b). On obtient facilement la valeur de k. □

Définition 1.7.6. — Soit z_1, z_2, z_3, z_4 quatre points de $\hat{\mathbb{C}}$, tels que z_1,z_2 et z_3 sont distincts. On appelle *birapport* de ces points *pris dans cet ordre* et on note

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] \in \hat{\mathbb{C}}$$

l'image de z_4 par l'unique homographie qui envoie (z_1, z_2, z_3) sur $(\infty, 0, 1)$.

Compte tenu des calculs précédents, on a donc :

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \Big/ \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

si $\infty \notin \{z_1, z_2, z_3\}$. Si $z_1 = \infty$, respectivement $z_2 = \infty$, $z_3 = \infty$, on obtient respectivement (on retrouve ces formules en faisant tendre la variable adéquate vers l'infini dans la formule précédente) :

$$\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_2}, \qquad \frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}, \qquad \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}.$$

Quand on écrira un birapport $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ *il sera sous-entendu que les trois premiers points sont distincts.* Par définition même du birapport, on a :

$$[\infty, 0, 1, z] \equiv z \text{ pour tout } z \in \hat{\mathbb{C}}.$$

Théorème 1.7.7. — *Soit* (z_1, z_2, z_3, z_4) *et* (z'_1, z'_2, z'_3, z'_4) *deux 4-uplets de points de* $\hat{\mathbb{C}}$*, les trois premiers éléments de chacun d'eux étant distincts. Il existe une homographie* T *telle que* $T(z_k) = z'_k$*,* $k = 1, \ldots, 4$*, si et seulement si*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [z'_1, z'_2, z'_3, z'_4]. \tag{12}$$

Démonstration. — Soit S (respectivement S') l'homographie qui envoie (z_1, z_2, z_3) (respectivement (z'_1, z'_2, z'_3)) sur $(\infty, 0, 1)$. L'égalité (12) signifie $S(z_4) = S'(z'_4)$. Si elle est vérifiée, $T = S'^{-1} \circ S$ envoie z_k sur z'_k, $k = 1, \ldots, 4$.

Réciproquement, si T existe comme dans l'énoncé, $S' \circ T \circ S^{-1}$ conserve $(\infty, 0, 1)$; c'est donc l'identité et $S'(z'_4) = S' \circ T(z_4) = S(z_4)$. □

En particulier :

Corollaire 1.7.8. — *Les homographies conservent le birapport.*

La propriété géométrique la plus intéressante des homographies est leur action sur les cercles et les droites.

Définition 1.7.9. — Un cercle de $\mathbb{C}$, ou la réunion d'une droite de $\mathbb{C}$ et du point à l'infini est appelé un *quasi-cercle*[(4)].

Théorème 1.7.10. — *L'image d'un quasi-cercle par une homographie est un quasi-cercle.*

Démonstration. — Une similitude $T(z) = az + b$ transforme un cercle en un cercle et une droite en une droite. C'est une propriété géométrique bien connue (donnez-en une démonstration analytique !). Compte tenu du Lemme 1.7.3, il suffit de montrer que l'image d'un quasi-cercle par l'involution $T_0(z) = 1/z$ est un quasi-cercle.

Une droite de $\mathbb{C}$ a une équation de la forme :

$$az + \overline{az} + \rho = 0, \qquad a \in \mathbb{C}^*, \ \rho \in \mathbb{R}.$$

Un cercle de $\mathbb{C}$ a une équation de la forme :

$$0 = |z - a|^2 - r^2 = (z - a)(\overline{z} - \overline{a}) - r^2 = |z|^2 - (a\overline{z} + \overline{a}z) + |a|^2 - r^2$$

4. Cette terminologie n'est pas standard ; « cercle de $\hat{\mathbb{C}}$ » serait mieux ; je veux seulement éviter toute confusion. Dans ce cours, un cercle est un cercle.

avec $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$. L'intersection d'un quasi-cercle C avec $\mathbb{C}$ a donc une équation de la forme :

$$k|z|^2 + a\overline{z} + \overline{a}z + l = 0, \tag{13}$$

avec $a \in \mathbb{C}$ et $k,\, l \in \mathbb{R}$. C est une droite si et seulement si $a \neq 0$ et $k = 0$; C est un cercle si et seulement $k \neq 0$ et $kl < |a|^2$.

Hormis peut-être pour les points $0 = T_0(\infty)$ et $\infty = T_0(0)$, on obtient l'équation de $T_0(C)$ en substituant $T_0^{-1}(w) = 1/w$ à z dans l'équation (13). On obtient

$$k/|w|^2 + a/\overline{w} + \overline{a}/w + l = 0,$$

ou encore :

$$k + aw + \overline{aw} + l|w|^2 = 0,$$

l'équation de l'intersection avec C d'un quasi-cercle C'. En considérant à part les cas de $0 = T_0(\infty)$ et $\infty = T_0(0)$, on vérifie que $T_0(C) = C'$. □

On peut remarquer que si D est une droite, $T_0(D \cup \infty)$ est la réunion d'une droite et de ∞ si $0 \in D$ et un cercle sinon. Dans le dernier cas, l'un des points du cercle est l'image de ∞. Par exemple, l'image de la droite D de $\mathbb{C}$ d'équation $\operatorname{Re} z = 1$ par T_0 est le cercle qui passe par 0 et est tangent en 1 à D, *sauf le point* 0.

1.8. Rappels et compléments sur la connexité

Dans les rappels qui suivent, X (ou X'...) désigne un espace topologique ; on pourra supposer sans inconvénient que X est un espace métrique, muni de la topologie associée. Si Y est une partie de X, Y est muni de la topologie induite.

Définition 1.8.1. — X est *connexe* si les seules parties de X qui sont ouvertes dans X et fermées dans X sont X et $\emptyset$.

Lemme 1.8.2. — *X est connexe si et seulement si, pour toute partition $X = X' \sqcup X''$ par des ouverts de X, X' ou X'' est vide.*

Démonstration. — Si $X = X' \sqcup X''$ est une partition par des ouverts de X, $X' = X \backslash X''$ et $X'' = X \backslash X'$ sont aussi des fermés de X... □

Lemme 1.8.3. — *Si Y_i est une partie connexe de X pour tout $i \in I$ et si $\cap_{i\in I} Y_i \neq \emptyset$, $\cup_{i\in I} Y_i$ est connexe.*

Démonstration. — Soit $a \in \cap_{i\in I} Y_i$ et $Y = \cup_{i\in I} Y_i$. Si $Y = Y' \sqcup Y''$ est une partition par des ouverts de Y, par exemple $a \in Y'$. Pour chaque $i \in I$, $Y_i = (Y' \cap Y_i) \sqcup (Y'' \cap Y_i)$ est une partition par des ouverts de Y_i ; comme $Y' \cap Y_i \ni a$ est non vide et que Y_i est connexe, $Y'' \cap Y_i$ est vide. Comme c'est vrai pour tout $i \in I$, Y'' est vide. □

On en déduit la notion de composante connexe :

Définition 1.8.4. — Soit $a \in X$. La réunion des connexes $Y \subset X$ tels que $a \in Y$ est appelée la *composante connexe de a dans X*. C'est « la plus grande partie connexe de X qui contienne a ».

Théorème 1.8.5. — *Si $f : X \to Y$ est continue et si X est connexe, $f(X)$ est connexe.*

Démonstration. — On peut remplacer Y par $f(X)$ dans l'énoncé, *i.e.* on peut supposer f surjective. Si $Y = Y' \sqcup Y''$ est une partition par des ouverts de Y, $X = f^{-1}(Y') \sqcup f^{-1}(Y'')$ est une partition par des ouverts de X car f est continue. Si X est connexe, par exemple $f^{-1}(Y') = \emptyset$ et comme f est surjective, $Y' = \emptyset$. □

Rappelons qu'un espace topologique Y est discret si toute partie de Y est ouverte. Donc Y est discret si et seulement si les singletons sont à la fois ouverts et fermés. Les seules parties connexes d'un espace discret sont donc les singletons.

Lemme 1.8.6. — *Soit X un espace topologique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) X est connexe.
(2) Toute application continue $f : X \to \{0, 1\}$ est constante.
(3) Toute application continue $f : X \to Y$ à valeurs dans un espace discret Y est constante.

Démonstration. — (1)⇒(2) découle du théorème précédent, parce que $\{0, 1\}$ n'est pas connexe.

Ensuite, si $f\colon X \to Y$ est non constante et si Y est discret, soient y_1, y_2 deux éléments distincts dans $f(X)$. On définit alors une application $g\colon Y \to \{0, 1\}$ par $g(y_1) = 0$ et $g(y) = 1$ pour tout $y \neq y_1$. Alors g est continue, puisque Y est discret. Donc $g \circ f$ est continue, non constante, de X dans $\{0, 1\}$: on vient de montrer que non(3) ⇒ non(2), donc (2)⇒(3). Puis (3)⇒(2) est immédiat.

Enfin, supposons (2) et prouvons (1). Soit $X = U \sqcup V$ une partition de X en deux ouverts. On définit alors $f\colon X \to \{0, 1\}$ par $f_{|U}$ constante égale à 0 et $f_{|V}$ constante égale à 1. Alors f est continue, donc constante, donc U ou V est vide. □

Il n'y a pas grand chose à ajouter dans un cadre aussi général. On s'intéresse maintenant aux sous-espaces (topologiques) de $\mathbb{C}$, mais ce qu'on va dire est vrai dans le cadre, par exemple, des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés. Les démonstrations sont identiques, aux notations près. Le théorème suivant est aussi fondamental que bien connu :

Théorème 1.8.7. — *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

C'est une conséquence de la propriété (ou de l'axiome) de la borne supérieure. Cette propriété intervient aussi dans la démonstration, laissée au lecteur, du lemme suivant :

Lemme 1.8.8. — *Soit X une partie de $\mathbb{R}$ telle que si $x, x' \in X$ et $x \leq x'$, le segment $[x, x']$ soit contenu dans X. Alors X est un intervalle.*

Démonstration. — Soit X une partie connexe de $\mathbb{R}$ et $x < x'$ des points de X. S'il existe $c \in [x, x'] \backslash X$, $X = X \cap]-\infty, c[\sqcup X \cap]c, +\infty[$; contradiction. Donc X est un intervalle d'après le lemme.

Réciproquement, soit I un intervalle et supposons qu'il existe une partition $I = X' \sqcup X''$ par des ouverts non vides de I. On peut supposer $x' \in X'$, $x'' \in X''$ et $x' < x''$. Soit $c = \sup([x', x''] \cap X')$. Notons que $c \in [x', x''] \subset I$ car I est un intervalle. Si $c \in X'$, $c < x''$ et comme X' est ouvert dans I, $[c, c + \epsilon[\subset X'$ pour $\epsilon > 0$ assez petit ; c'est impossible par définition de c. Donc $c \in X''$, $c > x'$. Comme X'' est ouvert dans I, $]c - \epsilon, c] \subset X''$ pour $\epsilon > 0$ assez petit ; c'est encore impossible par définition de c. □

On va donner une caractérisation des ouverts connexes de $\mathbb{C}$ avec, on l'espère, un parfum plus géométrique que la simple définition de la connexité.

Définition 1.8.9. — Un *arc* dans X est une application continue $c : [t_0, t_1] \to X$, où $[t_0, t_1]$ est un segment non trivial (*i.e.* $t_0 < t_1$) de $\mathbb{R}$. On dit que $a = c(t_0)$ est *l'origine* et $b = c(t_1)$ l'*extrémité* de l'arc c. On dit aussi que c est *un arc de a à b dans X*. Si $a = b$, on dit que l'arc c est *fermé*. On note $\langle c\rangle := c([t_0, t_1])$ l'image de c.

Définition 1.8.10. — L'espace topologique X est *connexe par arcs* si, pour tout a, $b \in X$, il existe un arc de a à b dans X.

Proposition 1.8.11. — *Si X est connexe par arcs, X est connexe.*

Démonstration. — Si $X \neq \emptyset$ et $a \in X$, il existe, pour tout $x \in X$, un arc c_x de a à x dans X. Donc X est la réunion des connexes $\langle c_x\rangle$, $x \in X$, qui tous contiennent a. □

La réciproque est fausse en général, même si X est un compact de $\mathbb{R}^2$:

Exercice 1.8.12. — Soit $K = \{(t, \sin(1/t)),\ 0 < t \leq 1\} \cup \{(0, t),\ -1 \leq t \leq 1\}$. Montrer que K est compact, connexe, et que K n'est pas connexe par arcs.

Définition 1.8.13. — Soient $c_0 : [t_0, t_1] \to X$ et $c_1 : [t'_0, t'_1] \to X$ deux arcs, tels que $c_0(t_1) = c_1(t'_0)$. On définit l'*arc juxtaposé* de c_0 et c_1 par $c_0 \mathrm{v} c_1 : [t_0, t_1 + t'_1 - t'_0] \to X$ tel que $(c_0 \mathrm{v} c_1)(t) = c_0(t)$ si $t \leq t_1$ et $(c_0 \mathrm{v} c_1)(t) = c_1(t - t_1 + t'_0)$ si $t_1 \leq t \leq t_1 + t'_1 - t'_0$.

On peut maintenant énoncer le résultat principal de cette section :

Théorème 1.8.14. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Alors*

$$\Omega \text{ est connexe} \iff \Omega \text{ est connexe par arcs.}$$

Démonstration. — Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit $a \in \Omega$. On introduit l'ensemble X des points $b \in \Omega$ tels qu'il existe un arc de a à b dans Ω.

$a \in X$. Prendre un arc constant !

X est un ouvert de Ω. En effet, soit $b \in X$ et $D(b, r) \subset \Omega$. Si $c \in D(b, r)$, $[b, c] : [0, 1] \ni t \to b + t(c - b)$ va de b à c dans Ω, donc si c_0 va de a à b dans Ω, $c_0 \mathrm{v}[b, c]$ va de a à c dans Ω.

X est fermé dans Ω. Soit $b \notin X$ et $D(b, r) \subset \Omega$. En échangeant les rôles de b et c dans l'argument précédent, on voit que $X \cap D(b, r) = \emptyset$.

X est ouvert, fermé, non vide dans Ω. Donc $X = \Omega$. □

Exercice 1.8.15. — Montrer que si Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, on peut joindre deux points $a, b \in \Omega$ par un arc dont l'image est une union de segments horizontaux ou verticaux.

CHAPITRE 2

SÉRIES ENTIÈRES, EXPONENTIELLE, ARGUMENTS, LOGARITHMES, PUISSANCES

2.1. Rappels sur les séries de fonctions et les familles sommables

Ce paragraphe commence par des rappels de sujets traités en cours de deuxième année [1] ; on y renvoie le lecteur pour plus de détails.

Rappelons que factorielle zéro est $0! = 1$ et que $z^0 = 1$.

2.1.1. Séries de fonctions. — Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite de fonctions de $\Omega \subset \mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous désignerons par $\sum u_n(z)$, ou $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(z)$, avec $z \in \Omega$, la série numérique (complexe) de terme général $u_n(z)$, et nous désignerons par $\sum u_n$, ou encore $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, la série de fonctions sur Ω, de terme général u_n. Les sommes partielles seront généralement notées

$$S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} u_n(z), \quad \text{et} \quad S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Si, au point $z \in \Omega$, la suite $(S_N(z))_{N\geq 0}$ converge vers une limite (notons-la $f(z)$), on note $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(z)$ la *somme* de cette série numérique, et

$$R_N(z) = f(z) - S_N(z) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(z)$$

est alors le *reste* de la série numérique. Si, pour tout $z \in \Omega$, la série $\sum u_n(z)$ converge, on dit que la série $\sum u_n$ est *simplement convergente.*

On dit que $\sum u_n(z)$ est *absolument convergente* si la série $\sum |u_n(z)|$ converge ; cela implique la convergence de la série $\sum u_n(z)$ et on a alors

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(z) \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(z)|.$$

1. Voir cours de LM250 ou LM260

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge absolument sur Ω si la série $\sum |u_n|$ est simplement convergente sur Ω.

On dit que la série $\sum u_n$ *converge uniformément* sur Ω si elle converge simplement sur Ω et si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \geq 0$ tel que pour tout $N \geq N_\varepsilon$, et pour tout $z \in \Omega$, $|R_N(z)| \leq \varepsilon$.

On dit que $\sum u_n$ *converge normalement sur* Ω si la série de terme général $||u_n|| = \sup_{z\in\Omega} |u_n(z)|$ est convergente.

Proposition 2.1.1. — *(a) Toute série normalement convergente sur Ω y est absolument convergente et uniformément convergente. (b) La réciproque est fausse.*

Démonstration. — (a) Supposons que $\sum u_n$ converge normalement sur Ω. Pour tout $z \in \Omega$, $|u_n(z)| \leq \sup_{z\in\Omega} |u_n(z)|$, donc le premier membre est le terme général d'une série convergente, autrement dit la série $\sum u_n$ converge absolument. En particulier elle converge simplement. Et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \geq 0$ tel que pour tout $N \geq N_\varepsilon$, on ait $\sum_{n=N+1}^{+\infty} ||u_n(z)|| \leq \varepsilon$. Alors pour tout $z \in \Omega$ et $N \geq N_\varepsilon$, on a :

$$|R_N(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |u_n(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} ||u_n|| \leq \varepsilon,$$

autrement dit la série $\sum u_n$ converge uniformément.

(b) Prenons $\Omega = \mathbb{C}$, $u_0 = 0$, et pour tout $n \geq 1$ prenons la fonction u_n égale à $1/n$ en $z = n$ et nulle partout ailleurs. La convergence absolue est évidente parce que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum u_n(z)$ a au plus un terme non nul. Si $\varepsilon > 0$ et $N(\varepsilon) \geq \frac{1}{\varepsilon}$, alors pour tout $N \geq N(\varepsilon)$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $|R_N(z)|$ est au plus égal à $\frac{1}{N+1} < \frac{1}{N(\varepsilon)} \leq \varepsilon$, donc la convergence est uniforme sur $\mathbb{C}$. Mais cette convergence n'est pas normale puisque $||u_n|| = \frac{1}{n}$ (dès que $n \geq 1$) est le terme général d'une série divergente. □

Théorème 2.1.2. — *La somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur Ω est encore continue sur Ω.*

Démonstration. — Notons u_n le terme général d'une série de fonctions convergeant uniformément vers f sur Ω. Soit $z_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$. Vu que $\sum u_n$ converge uniformément, il existe $N_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \geq N_\varepsilon$, et tout $z \in \Omega$, on ait

$$|S_N(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

La fonction S_{N_ε} définie par $S_{N_\varepsilon}(z) = \sum_{n=0}^{N_\varepsilon} u_n(z)$, est continue en z_0, donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $z \in \Omega$,

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |S_{N_\varepsilon}(z) - S_{N_\varepsilon}(z_0)| < \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout z tel que $|z - z_0| < \delta$, on a :

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z) - S_{N_\varepsilon}(z)| + |S_{N_\varepsilon}(z) - S_{N_\varepsilon}(z_0)| + |S_{N_\varepsilon}(z_0) - f(z_0)| < 3\varepsilon,$$

ce qui signifie que f est continue. □

Enfin, rappelons le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions réelles.

Théorème 2.1.3. — *Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de classe C^1 sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $\sum u_n(x_0)$ converge, et que la série $\sum u_n'$ converge uniformément sur I. Alors la série $\sum u_n$ converge simplement sur I vers une fonction f de classe C^1, qui vérifie, sur I : $f' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$.*

2.1.2. Familles sommables. — Tous les ensembles d'indices considérés dans cette section sont finis ou dénombrables. On notera $F(I)$ l'ensemble des parties finies d'un ensemble I.

2.1.2.1. Familles sommables de nombres positifs. — On considère d'abord des sommes d'éléments de $[0, +\infty]$. Comme en intégration, on pose $0.(+\infty) = 0$.

Définition 2.1.4. — Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$. On définit sa somme dans $[0, +\infty]$ par :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sup_{J \in F(I)} \sum_{i \in J} a_i \,.$$

Exemple 2.1.5. — On a $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i$.

On vérifie qu'on a pour $a, b, a_i, b_i \in [0, +\infty]$, $i \in I$:

$$\sum_{i \in I} aa_i + bb_i = a \sum_{i \in I} a_i + b \sum_{i \in I} b_i$$

et que :

$$J \subset I \Rightarrow \sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i \,; \qquad a_i \leq b_i \Rightarrow \sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i \,.$$

Lemme 2.1.6. — *Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$. Soit $I = \coprod_{l \in L} I_l$ une partition de I. Alors*

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{l \in L} \sum_{i \in I_l} a_i \text{ (Associativité)} \,.$$

Démonstration. — Si $I' \in F(I)$ alors l'ensemble L' des l tels que $I' \cap I_l \neq \emptyset$ est fini. Donc

$$\sum_{i \in I'} a_i = \sum_{l \in L'} \sum_{i \in I' \cap I_l} a_i \leq \sum_{l \in L'} \sum_{i \in I_l} a_i \leq \sum_{l \in L} \sum_{i \in I_l} a_i \,.$$

Réciproquement soit $L' \in F(L)$. Pour tout $l \in L'$, soit $I'_l \in F(I_l)$. Alors $\coprod_{L'} I'_l \in F(I)$ donc $\sum_{l\in L'}\sum_{i\in I'_l} a_i \leq \sum_{I} a_i$. L' étant fixé, on passe au sup par rapport à $I'_l \in F(I_l)$. On obtient par linéarité

$$\sum_{l\in L'}(\sum_{i\in I_l} a_i) \leq \sum_{i\in I} a_i\,.$$

□

2.1.2.2. Familles sommables de nombres complexes.—

Définition 2.1.7. — Une famille $(a_i)_{i\in I}$ de nombres complexes est dite sommable si

$$\sum_{i\in I} |a_i| < +\infty\,.$$

On note $l^1(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des familles sommables de nombres complexes.

Rappelons quelques notations : si $a \in \mathbb{R}$, on note $a^+ = \max(0, a)$ et $a^- = -\min(0, a)$. On a

$$a = a^+ - a^- \quad \text{et} \quad |a| = a^+ + a^-\,.$$

Si $a \in \mathbb{C}$, on a $\frac{1}{2}(|\mathrm{Re\,a}| + |\mathrm{Im\,a}|) \leq |\mathrm{a}| \leq |\mathrm{Re\,a}| + |\mathrm{Im\,a}|$. On en déduit :

Lemme 2.1.8. — *Une famille $(a_i)_{i\in I}$ de nombres complexes est sommable ssi $(\mathrm{Re\,a_i})_{\mathrm{i\in I}}$ et $(\mathrm{Im\,a_i})_{\mathrm{i\in I}}$ le sont. Si les a_i sont réels, la famille est sommable ssi $(a_i^+)_{i\in I}$ et $(a_i^-)_{i\in I}$ sont sommables.*

Définition 2.1.9. — Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Si les a_i sont réels, on pose

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^-\,.$$

Si les a_i sont complexes, on pose

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re\,a_i} + \mathrm{i} \sum_{\mathrm{i\in I}} \mathrm{Im\,a_i}\,.$$

Lemme 2.1.10. — *Si $a_i \in \mathbb{R}$ s'écrit $a_i = b_i - c_i$ avec $(b_i)_{i\in I}$ et $(c_i)_{i\in I}$ des familles sommables de réels positifs alors*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} b_i - \sum_{i\in I} c_i\,.$$

Démonstration. — L'hypothèse $a_i^+ - a_i^- = b_i - c_i$ entraine $a_i^+ + c_i = a_i^- + b_i$. Donc $\sum_{i\in I} a_i^+ + c_i = \sum_{i\in I} a_i^- + b_i$. On applique la linéarité de la somme pour les familles de nombres positifs pour conclure.

□

Théorème 2.1.11. — *Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes.*
i) *La somme $m = \sum_{i\in I} a_i$ de cette famille est caractérisée par*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists J_0 \in F(I) \text{ tel que } \forall J \in F(I),\ J_0 \subset J \Rightarrow |\sum_{j\in J} a_j - m| < \epsilon\,.$$

ii) *Soit $I = \coprod_{l\in L} I_l$ une partition de I. Pour tout $l \in L$, la famille $(a_i)_{i\in I_l}$ est sommable, la famille $(\sum_{i\in I_l} a_i)_{l\in L}$ est sommable et*

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{l\in L}\sum_{i\in I_l} a_i \text{ (Associativité)}\ .$$

iii) *$l^1(I, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel, l'application*

$$l^1(I, \mathbb{C}) \ni (a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} |a_i|$$

est une norme, l'application

$$l^1(I, \mathbb{C}) \ni (a_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} a_i \in \mathbb{C}$$

est linéaire et continue.

Démonstration. —
i) La preuve de l'unicité est laissée en exercice.
i.1) La propriété est vraie pour une famille de nombres positifs car alors $m = \sup_{J\in F(I)} \sum_{j\in J} a_j$: Soit $J_0 \in F(I)$ tel que $m - \epsilon < \sum_{j\in J_0} a_j$. Si $J_0 \subset J$ alors $\sum_{j\in J_0} a_j \le \sum_{j\in J} a_j \le m$.
i.2) Si $a_i \in \mathbb{R}$, soient $m_\pm = \sum_{i\in I} a_i^\pm$. $\exists J_\pm \in F(I)$ tels que $J_\pm \subset J \Rightarrow m_\pm - \frac{\epsilon}{2} < \sum_{j\in J} a_j^\pm \le m_\pm$.
Alors

$$J_+ \cup J_- \subset J \Rightarrow |m - \sum_{j\in J} a_j| \le |m^+ - \sum_{j\in J} a_j^+| + |m^- - \sum_{j\in J} a_j^-| \le \epsilon\,.$$

i.3) Si $a_j \in \mathbb{C}$, on écrit $a_j = \mathrm{Re\,a_j} + \mathrm{iIm\,a_j}$.
ii1) La propriété est vraie pour les familles de nombres positifs.
ii2) Si $a_i \in \mathbb{R}$, on a $\sum_{i\in I_l} a_i = \sum_{i\in I_l} a_i^+ - \sum_{i\in I_l} a_i^-$. Le lemme 2.1.10 implique

$$\sum_{l\in L}(\sum_{i\in I_l} a_i^+) - \sum_{l\in L}(\sum_{i\in I_l} a_i^-) = \sum_{l\in L}\sum_{i\in I_l} a_i$$

donc

$$\sum_{i\in I} a_i := \sum_{i\in I} a_i^+ - \sum_{i\in I} a_i^- = \sum_{l\in L}\sum_{i\in I_l} a_i^+ - \sum_{l\in L}\sum_{i\in I_l} a_i^- = \sum_{l\in L}\sum_{i\in I_l} a_i\,.$$

ii3) On a $\mathrm{Re}\sum_{i\in I}\mathrm{a_i} := \sum_{i\in I}\mathrm{Re}\,\mathrm{a_i} = \sum_{l\in L}\sum_{i\in I_l}\mathrm{Re}\,\mathrm{a_i} := \sum_{l\in L}\mathrm{Re}(\sum_{i\in I_l}\mathrm{a_i}) := \mathrm{Re}\sum_{l\in L}\sum_{i\in I_l}\mathrm{a_i}$. La même relation est vraie pour la partie imaginaire, ce qui prouve l'identité.

iii) Le fait que $l^1(I,\mathbb{C})$ soit un espace vectoriel et que $\sum_{i\in I}|a_i|$ est une norme résulte de l'inégalité triangulaire, et des propriétés de croissance et de linéarité de la somme d'une famille de nombres positifs. Comme $a_i + b_i = a_i^+ + b_i^+ - a_i^- - b_i^-$, le lemme 2.1.10 entraine l'additivité de la somme pour des familles de nombres réels. Que $\sum_{i\in I} aa_i = a\sum_{i\in I}$ est clair si a, $a_i \in \mathbb{R}$. On déduit comme en *ii*3) la linéarité complexe. □

Corollaire 2.1.12. — *Soient $\sum_{i\geq 0} a_i$ et $\sum_{j\geq 0} b_j$ deux séries absolument convergentes. Alors la famille $(a_ib_j)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et*

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_ib_j = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i+j=n} a_ib_j,$$

la dernière série étant de plus absolument convergente.

Démonstration. — On a

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}|a_i||b_j| = \sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{(i,j)\in\{i\}\times\mathbb{N}}|a_i||b_j|$$
$$=\sum_{i\in\mathbb{N}}|a_i|(\sum_{(i,j)\in\{i\}\times\mathbb{N}}|b_j|) = \sum_{i\in\mathbb{N}}|a_i|(\sum_{j\in\mathbb{N}}|b_j|) = (\sum_{j\in\mathbb{N}}|b_j|)\sum_{i\in\mathbb{N}}|a_i| < +\infty\,.$$

La famille est donc sommable et on peux écrire les formules ci-dessus sans modules.

Pour la dernière égalité, on note que $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \sqcup_{n\in\mathbb{N}}\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \text{ tel que } i+j=n\} = \sqcup_{n\in\mathbb{N}}T_n$ alors $\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_ib_j = \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{(i,j)\in T_n} a_ib_j$.

□

2.2. Séries entières de la variable complexe z

On rappelle qu'une série entière (complexe) est une série de fonctions du type : $\sum a_nz^n$, avec $a_n\in\mathbb{C}$, c'est-à-dire que le terme général est un monome de degré n.

L'étude de la convergence des séries entières repose sur la comparaison avec une série géométrique. La démonstration du lemme suivant est plus importante encore que son énoncé :

***Lemme 2.2.1* (Abel)**. — *Soit $r>0$. Si la suite a_nr^n est bornée, la série $\sum a_nz^n$ converge absolument pour tout $z\in D(0,r)$. Pour tout $s\in]0,r[$, la convergence est normale sur le disque fermé $\overline{D}(0,s)$.*

Démonstration. — Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|a_n|r^n \leq M$, ou encore $|a_n| \leq \dfrac{M}{r^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $s \in]0, r[$. Pour tout $z \in \overline{D}(0, s)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|a_n z^n| \leq |a_n|s^n \leq M\left(\frac{s}{r}\right)^n.$$

Le membre de droite est le terme général d'une série géométrique de raison $\dfrac{s}{r} < 1$ donc convergente. D'où le lemme. □

La conséquence suivante est immédiate.

Théorème 2.2.2. — *Étant donnée la série entière $\sum a_n z^n$, on définit :*

$$r = \sup\{s \geq 0, \text{ la suite } a_n s^n \text{ est bornée}\} \in [0, +\infty].$$

La série converge si $|z| < r$ et diverge si $|z| > r$.

Le $r \in [0, +\infty[$ dont cet énoncé assure l'existence est appelé le *rayon de convergence* de la série entière. Si $r > 0$, le disque $D(0, r)$ est appelé le *disque ouvert de convergence* de la série entière.

Le domaine de convergence de la série entière, *i.e.* l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels elle converge, vérifie donc :

$$D(0, r) \subset D \subset \overline{D}(0, r).$$

Le cercle $C(0, r)$ est souvent appelé *cercle d'incertitude* de la série entière : en chaque point de ce cercle, la série $\sum a_n z^n$ peut *a priori* avoir n'importe quel comportement, convergente ou divergente.

Exemple 2.2.3. — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé et considérons la série $\sum_{n\geq 1} n^\alpha z^n$. Comme $|z|^n n^\alpha$ converge vers 0 si $|z| < 1$ et vers $+\infty$ si $|z| > 1$, le rayon de convergence est 1. On a $\max_{|z|\leq 1} |z^n| n^\alpha = n^\alpha$. Si $\alpha < -1$, la série converge normalement sur le disque unité fermé $\overline{D(0, 1)}$ vers une fonction continue sur ce disque. Si $\alpha \geq 0$ et $z \in C(0, 1)$, le terme général ($n^\alpha z^n$) de cette série ne converge pas vers zéro et la série diverge sur le cercle unité. Si $-1 < \alpha < 0$, on montre, par exemple à l'aide d'une transformation d'Abel, qu'il y a convergence uniforme de la série de fonctions sur tout ensemble de la forme $\overline{D(0, 1)} \setminus D(1, \epsilon)$ $(0 < \epsilon < 1)$.

Si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une série entière, nous dirons que sa *série entière dérivée* est la série entière $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$.

Lemme 2.2.4. — *Toute série entière a le même rayon de convergence que sa série dérivée.*

Démonstration. — Notons r le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, et r' celui de la série entière $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1}z^n$. Soit $s \in]0,r[$. Si $t \in]s,r[$, la suite $a_n t^n$ est bornée et

$$(n+1)|a_{n+1}|s^n \leq (|a_{n+1}|t^{n+1}) \times (n+1)(s/t)^n/t.$$

À droite, le premier facteur est borné et le second est décroissant en n pour n assez grand. La suite $(n+1)|a_{n+1}|s^n$ est donc bornée. Ceci montre que $r' \geq r$.

D'autre part, $|a_n|s^n \leq n|a_n|s^{n-1} \times s$ pour $n \geq 1$, montre que $r' \leq r$. □

Cela entraîne encore la formule suivante (dans la pratique, cette formule sert rarement à déterminer un rayon de convergence) :

***Lemme 2.2.5* (Formule d'Hadamard).** — *Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est donné par la formule :*

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}.$$

Démonstration. — Soit $z \in \mathbb{C}$. Si

$$|z| \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} > 1,$$

$|z||a_n|^{1/n} > 1$ donc $|a_n z^n| > 1$ pour une infinité de valeurs de n : la série diverge. Si

$$|z| \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} < 1,$$

il existe $c \in]0,1[$ tel que $|z||a_n|^{1/n} \leq c$ donc $|a_n||z|^n \leq c^n$, pour n assez grand : la série converge. □

On s'intéresse maintenant aux propriétés de la somme d'une série entière sur son disque ouvert de convergence.

Théorème 2.2.6. — *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $r > 0$; notons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme de la série entière dans le domaine de convergence. Alors f est holomorphe sur $D(0,r)$ et, pour tout $z \in D(0,r)$,*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Autrement dit, la dérivée de la somme d'une série entière est la somme de sa série dérivée.

On peut obtenir ce résultat à l'aide du théorème 2.1.3. Mais nous allons en donner une démonstration plus directe, et instructive, tirée d'un cours de premier cycle donné à Lille.

Démonstration. — Soit $z \in D(0,r)$. En appliquant deux fois le lemme 2.2.4, on a la convergence des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} = g_1(z)$ et $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|a_n| z^{n-2} = g_2(z)$. Fixons s tel que $|z| < s < r$. Soit $h \in \mathbb{C}$ tel que $|z| + |h| < s$; notons $t = |z| + |h|$. On a

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left((z+h)^n - z^n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(-z^n + \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k} h^k\right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(nhz^{n-1} + h^2 \sum_{k=2}^{n} C_n^k z^{n-k} h^{k-2}\right). \end{aligned}$$

On a donc

$$f(z+h) - f(z) - hg_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n h^2 \left(\sum_{k=2}^{n} C_n^k z^{n-k} h^{k-2}\right),$$

et il s'agit maintenant de majorer le deuxième terme :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} C_n^k \left|z^{n-k} h^{k-2}\right| &= \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)}{k(k-1)} C_{n-2}^{k-2} \left|z^{n-k} h^{k-2}\right| \\ &\leq n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^{k} \left|z^{n-k-2} h^{k}\right| \\ &\leq n(n-1)(|z| + |h|)^{n-2}, \end{aligned}$$

autrement dit, $|f(z+h) - f(z) - hg_1(z)| \leq |h^2 g_2(t)|$. Notant M le maximum de la fonction (continue) $|g_2|$ sur le disque fermé $\overline{D}(0,s)$, nous avons donc montré que

$$|f(z+h) - f(z) - hg_1(z)| \leq |h|^2 M,$$

où M ne dépend pas de h : le théorème en découle. □

La définition de la $\mathbb{C}$-dérivabilité à un ordre $p \in \mathbb{N}$ et, quand elle a lieu, de la $\mathbb{C}$-dérivée d'ordre p est évidente, par récurrence. Par récurrence aussi, on en déduit le résultat suivant :

Théorème 2.2.7. — *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $r > 0$. Sa somme f est $\mathbb{C}$-dérivable à tous les ordres sur son disque ouvert de convergence $D(0,r)$, et elle est la somme de sa série de Taylor :*

$$\textit{pour tout } z \in D(0,r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Démonstration. — Le théoréme précédent entraine que

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n \geq k} n(n-1)\ldots(n-k+1) a_n z^{n-k} = \sum_{u \geq 0} \frac{(k+u)!}{u!} a_{u+k} z^u.$$

Donc $f^{(k)}(0) = k!a_k$. On peut aussi écrire $\frac{f^{(k)}}{k!}(z) = \sum_{u\geq 0} \binom{k+u}{k} a_{u+k} z^u$ avec $\binom{k+u}{k}$ le coefficient binomial. □

Exemple 2.2.8. — on a le développement en série suivant sur $D(0,1)$:

$$\frac{1}{(1-z)^{j+1}} = \sum_{i\geq 0} \frac{(i+j)!}{j!i!} z^i$$

car $(\frac{1}{(1-z)^k})^{(j)} = \frac{(j+k-1)!}{(k-1)!(1-z)^{j+k}}$.

Corollaire 2.2.9. — *La somme d'une série entière (de rayon de convergence non nul) est nulle au voisinage de* 0 *si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.*

Théorème 2.2.10. — *Si deux séries entières* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *convergent sur* $D(0,r)$, *et si* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, *alors les séries entières* $\sum (\lambda a_n + \mu b_n) z^n$ *et* $\sum c_n z^n$, *avec* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, *convergent aussi sur* $D(0,r)$, *et pour tout* $z \in D(0,r)$ *on a*

$$\lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) z^n \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

Démonstration. — Nous ne démontrons que la propriété concernant le produit. Si $|z| < r$, on a

$$+\infty > \sum_{i\in\mathbb{N}} |a_i||z|^i \sum_{j\in\mathbb{N}} |b_j||z^j| \quad = \quad \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} |a_i b_j||z|^{i+j} .$$

La famille $(a_i b_j z^{i+j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable donc

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} a_i b_j z^{i+j} = \ (\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i z^i)(\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i z^i) = \ \sum_{n\in\mathbb{N}} z^n (\sum_{i+j=n;\, i,j\geq 0} a_i b_j) .$$

□

2.2.1. Fonctions analytiques (complexes). — Soit $a \in \mathbb{C}$ et f une fonction définie au voisinage de a. On dit que f est *développable en série entière* en a s'il existe $r > 0$ et une suite a_n, $n \in \mathbb{N}$, de nombres complexes tels que pour tout $z \in D(a,r)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n.$$

Bien sûr, la convergence du second membre fait partie de la condition. On dit aussi que f est *développable en série entière de* $z - a$ sur $D(a,r)$. En posant $z = a + h$, la condition s'écrit :

$$h \in D(0,r), \qquad f(a+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n h^n.$$

On peut donc utiliser les propriétés des séries entières.

Définition 2.2.11. — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ est *analytique* sur Ω si, pour tout $a \in \Omega$, f est développable en série entière en a. On note $A(\Omega)$ l'ensemble des fonctions analytiques sur Ω. Une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ est appelée fonction *entière*.

Les résultats du paragraphe précédent entrainent :

Théorème 2.2.12. — *Soit Ω un ouvert de $\mathcal{C}$.*
1. $A(\Omega)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$.
2. Si $f \in A(\Omega)$ et si l'ouvert ω est contenu dans Ω, alors $f_{|\omega} \in A(\omega)$.
3. Si $f \in A(\Omega)$, f a des $\mathbb{C}$-dérivées de tout ordre $p \in \mathbb{N}$ et $f^{(p)} \in A(\Omega)$.
4. Pour tout $a \in \Omega$, il existe un disque $D(a,r) \subset \Omega$ sur lequel f est la somme de sa série de Taylor en a :

$$z \in D(a,r), \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

Les fractions rationnelles sont analytiques en dehors de leurs pôles. Plus précisément, on a :

Lemme 2.2.13. — *Soit $R \in \mathbb{C}(z)$ et $A = \{a_1, \dots, a_d\}$ l'ensemble de ses pôles. Si $a \in \mathbb{C} \setminus A$, R est développable en série entière de $z-a$ sur le disque $D(a,r)$, où $r = \min\limits_{k=1,\dots,d} |a-a_k|$ est la distance de a à A.*

Démonstration. — On décompose R en éléments simples. On se ramène ainsi au cas où R est de la forme :

$$R(z) = \frac{1}{(z-b)^p}.$$

Si $a \neq b$, la formule de la série géométrique donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-z} = \frac{1}{(b-a)-(z-a)} &= \frac{1}{b-a}\left(1-\frac{z-a}{b-a}\right)^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(b-a)^{n+1}}\end{aligned}$$

sur $D(a, |b-a|)$. Dérivant $(p-1)-$fois, pour $z \in D(a,|b-a|)$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{(p-1)!}{(b-z)^p} &= \sum_{n \geq p-1}^{+\infty} n \dots (n-p+2) \frac{(z-a)^{n-p+1}}{(b-a)^{n+1}} \\ \left(\frac{b-a}{b-z}\right)^p &= \sum_{u \geq 0}^{+\infty} \binom{u+p-1}{p-1} \left(\frac{z-a}{b-a}\right)^u\end{aligned}$$

La fraction rationnelle R est donc développable en série entière de $z-a$ sur ce disque.

□

Théorème 2.2.14. — *La somme d'une série entière (de rayon de convergence non nul) est analytique sur son disque ouvert de convergence.*

Démonstration. — Il ne s'agit pas d'une lapalissade ! Il s'agit de montrer que si $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, avec $z \in D(0,r)$, et si $b \in D(0,r)$, alors f est développable en série entière en b. On va démontrer un résultat un peu plus précis : pour tout h tel que $|b|+|h| < r$, $f(b+h)$ est somme d'une série entière de h. On a

$$f(b+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (b+h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n C_n^k b^{n-k} h^k.$$

Mais $|b|+|h| < r$ entraine

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_n| C_n^k |b|^{n-k} |h|^k = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| (|b|+|h|)^n < +\infty\,.$$

La famille $(a_n C_n^k b^{n-k} h^k)_{n\in\mathbf{N},\, 0\le k\le n}$ est sommable et

$$\sum_{n\in\mathbf{N},\, 0\le k\le n} a_n C_n^k b^{n-k} h^k = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_n C_n^k b^{n-k} h^k = \sum_{k\in\mathbf{N}} h^k (\sum_{n\ge k} a_n C_n^k b^{n-k})$$

$$\forall h \in D(0, r-|b|),\ f(b+h) = \sum_{k\in\mathbf{N}} h^k (\sum_{n\ge k} a_n C_n^k b^{n-k})\,.$$

□

De même, on peut montrer que la composée de fonctions analytiques est encore analytique (là où elle est définie), et, aussi, la fonction réciproque d'une bijection analytique est analytique. Nous reviendrons sur ces points à l'issue du chapitre 3.

Nous allons maintenant voir des propriétés très importantes des fonctions analytiques.

***Théorème 2.2.15* (Principe du prolongement analytique).** — *Soit f une fonction analytique sur un ouvert connexe non vide $\Omega \subset \mathbb{C}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *f est nulle sur Ω.*
2. *f est nulle sur un ouvert non vide $\omega \subset \Omega$.*
3. *Il existe un point $a \in \Omega$ tel que pour tout $p \ge 0$, $f^{(p)}(a) = 0$.*

Les implications (1) ⇒ (2) et (2) ⇒ (3) sont triviales et ne font pas intervenir la connexité. L'analyticité de f est cruciale pour (3) ⇒ (2) et (2) ⇒ (1), et la connexité de Ω est cruciale pour (2) ⇒ (1).

Démonstration. — (3) ⇒ (2) parce que si $f^{(p)}(a) = 0$ pour tout $p \in \mathbf{N}$, la fonction f, qui est au voisinage de a la somme de sa série de Taylor au point a, est nulle sur ce voisinage.

Pour montrer (2) ⇒ (1), on introduit :

$$U = \{a \in \Omega, f \text{ est nulle au voisinage de } a \text{ dans } \Omega\}\,.$$

Par définition, U est un voisinage (dans Ω ou dans $\mathbb{C}$, c'est pareil) de chacun de ses points ; c'est donc un ouvert de Ω. Si la propriété (2) est vérifiée, l'ouvert U est non vide. Pour démontrer que $U = \Omega$, il suffit de montrer que U est fermé dans Ω (pas dans $\mathbb{C}$, ce n'est pas pareil !).

Soit $a_n \in U$ une suite qui converge vers $a \in \Omega$. Par définition de U, f est nulle au voisinage de chacun des points a_n, donc toutes ses dérivées, d'ordre ≥ 0, sont nulles en a_n. Comme $f^{(p)}$

est continue, $f^{(p)}(a) = \lim_{n\to+\infty} f^{(p)}(a_n) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Comme f est analytique en a, f est nulle au voisinage de a, donc $a \in U$ par définition de U. L'ensemble U est fermé dans Ω. □

En appliquant le théorème précédent à la différence $f - g$ de deux fonctions, on obtient :

Corollaire 2.2.16. — *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f, g \in A(\Omega)$. Si les fonctions f et g sont égales sur un ouvert non vide de Ω, elles sont égales.*

***Théorème 2.2.17* (Principe des zéros isolés)**. — *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in A(\Omega)$. Si f n'est pas la fonction nulle, l'ensemble $f^{-1}(\{0\})$ des zéros de f est discret : si $a \in \Omega$ est un zéro de f, il existe $D(a,\varepsilon) \subset \Omega$ tel que a soit le seul zéro de f contenu dans $D(a,\varepsilon)$.*

L'ensemble des zéro Z étant fermé dans Ω, Z discret entraine que Z est sans point d'accumulation dans Ω. Mais Z vu comme sous ensemble de $\mathbb{C}$ n'est pas fermé en général et donc peut admettre des points d'accumulations dans $\mathbb{C}$. La fonction $f : z \to \sin\frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$, $Z = \{\frac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ est discret, fermé dans $\mathbb{C}^*$, non fermé dans $\mathbb{C}$.

Démonstration. — Si f n'est pas la fonction nulle et si $a \in \Omega$, f n'est pas identiquement nulle au voisinage de a d'après le principe du prolongement analytique. Si $f(a) = 0$ et $f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ au voisinage de a, la série de droite n'est donc pas la série nulle : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_0 = \cdots = a_{p-1} = 0$ et $a_p \neq 0$. On peut écrire :

$$f(z) = (z-a)^p g(z)$$

où g est analytique au voisinage de a et $g(a) \neq 0$. Par continuité, g ne s'annule pas sur un disque $D(a,\varepsilon)$ et $f^{-1}(\{0\}) \cap D(a,\varepsilon) = \{a\}$. □

L'ensemble des zéros de $f \in A(\Omega)$ est fermé dans Ω, mais il n'est pas fermé dans $\mathbb{C}$ en général ! Un fermé de Ω peut ne pas avoir de point d'accumulation dans Ω et en avoir dans $\mathbb{C}$: ces derniers appartiennent alors à la frontière de Ω dans $\mathbb{C}$. On fera donc attention à bien comprendre le sens de la phrase suivante du principe des zéros isolés :

Corollaire 2.2.18. — *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f, g \in A(\Omega)$. Si l'ensemble $\{z \in \Omega, f(z) = g(z)\}$ a un point d'accumulation dans Ω, $f = g$.*

De la démonstration du théorème précédent, il découle :

Corollaire 2.2.19. — *Soit $f \in A(\Omega)$ une fonction analytique sur un ouvert Ω non vide de $\mathbb{C}$ et soit $a \in \Omega$. Ou bien f est identiquement nulle au voisinage de a, ou bien il existe un entier $p \in \mathbb{N}$, uniquement défini, qui vérifie les conditions équivalentes suivantes :*

1. $f^{(p)}(a) = 0$ si $0 \leq q < p$ et $f^{(p)}(a) \neq 0$;

2. le développement de f au voisinage de a est de la forme $f(z) = a_p(z-a)^p + \sum_{n\geq p+1} a_n(z-a)^n$ avec $a_p \neq 0$;

3. il existe une fonction h analytique au voisinage de a telle que $f(z) = (z-a)^p h(z)$ au voisinage de a et $h(a) \neq 0$.

4. il existe une fonction h analytique sur Ω telle que $f(z) = (z-a)^p h(z)$ sur Ω et $h(a) \neq 0$.

Si $p \geq 1$, on dit que a est un zéro de f, *d'ordre* ou *de multiplicité* p. Si $p = 0$, a n'est pas un zéro de f mais, par abus de langage, on dit que a est un zéro d'ordre 0 de f.

Démonstration. — Il reste à montrer le point 4) : on définit $h \in A(\Omega)$ par

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z-a)^p} & \text{si } z \in \Omega \setminus \{a\} \\ \displaystyle\sum_{n \geq p} a_n (z-a)^n & \text{si } z \in D(a, \epsilon) \end{cases}$$

avec $\epsilon > 0$ assez petit. On vérifie que la définition est cohérente. On en déduit que h est analytique sur Ω. □

2.3. Définition de l'exponentielle complexe par une série.

2.3.1. Définition. — La série entière de terme général $u_n = \dfrac{z^n}{n!}$, pour $n \geq 0$, a pour rayon de convergence $r = +\infty$ puisque $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{z}{n+1} = 0$. On appelle *exponentielle complexe* la somme de cette série :

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Elle est définie sur $\mathbb{C}$, notée $z \mapsto e^z$ ou $z \mapsto \exp(z)$. La restriction de l'exponentielle complexe à $\mathbb{R}$ coïncide avec celle définie au premier cycle.

Lemme 2.3.1. —

(14) *L'exponentielle est $\mathbb{C}$-dérivable et* $(e^z)' = e^z$.

(15) $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$.

(16) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

Démonstration. — Le rayon de convergence de la série entière définissant l'exponentielle est infini donc on peut dériver sous le signe somme :

$$(e^z)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = e^z.$$

D'après le théorème 2.1.12, $e^a \cdot e^b$ est égale à la série de terme général

$$\sum_{\substack{m+n=k \\ m,n \geq 0}} \frac{a^n}{n!} \cdot \frac{b^m}{m!} = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{m+n=k \\ m,n \geq 0}} \frac{k! a^n b^m}{n! m!} = \frac{(a+b)^k}{k!}.$$

Le dernier point résulte du fait que la conjugaison complexe est continue sur $\mathbb{C}$ (donc le conjugué d'une série est la série des conjugués) et que exp est définie par une série entière à coefficients réels. □

Remarque 2.3.2. — La formule $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ montre que l'exponentielle induit un homomorphisme de groupes $\exp : (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$.

2.3.2. Restriction de exp aux valeurs imaginaires pures de z. —

Proposition 2.3.3. — *On a $|e^{it}| = 1$ pour t réel et l'application $\varphi : \mathbb{R} \ni t \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}^*$ est un homomorphisme du groupe additif $\mathbb{R}$ sur le cercle unité C de $\mathbb{C}^*$, muni de sa structure de sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{C}^*$.*

Démonstration. — En effet, $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$, donc $e^{it}\overline{e^{it}} = e^{it-it} = e^0 = 1$. Et d'après le lemme précédent, on a $e^{i(t_1+t_2)} = e^{it_1} \cdot e^{it_2}$, donc φ est bien un homomorphisme. □

Pour étudier l'exponentielle, nous allons utiliser les propriétés des fonctions trigonométriques réelles cosinus et sinus. Cependant nous donnons au paragraphe suivant une autre méthode : on étudie *a priori* les fonctions $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathrm{Re}(e^{it})$, $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathrm{Im}(e^{it})$, on construit le nombre π, puis on montre que la longueur de l'arc du cercle unité $e^{i[0,t[}$ ($t \in [0, 2\pi[$) est t. Cette longueur est aussi par définition la mesure de l'angle (Ox, Oz). On retrouve alors les propriétés des fonctions trigonométriques réelles.

2.3.2.1. Propriétés de $t \mapsto e^{it}$ connaissant celles de cos *et* sin. — On a

$$\mathrm{Re}(e^{it}) = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{t^{2p}}{(2p)!} = \cos t \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(e^{it}) = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sin t\,.$$

Donc si $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, alors $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

Lemme 2.3.4. —
1. *L'application $\varphi : \mathbb{R} \ni t \mapsto e^{it} \in C$ est 2π-périodique et surjective sur le cercle unité.*
2. *Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, elle définit un homéomorphisme*

$$\varphi_{|]t_0-\pi,t_0+\pi[} :]t_0 - \pi, t_0 + \pi[\to C \setminus \{-\varphi(t_0)\}.$$

Démonstration. — Le premier point résulte des propriétés des fonctions trigonométriques réelles.
2) L'application $\varphi_{|]t_0-\pi,t_0+\pi[}$ est continue. Comme

$$e^{it} = 1 \iff \cos(t) = 1 \text{ et } \sin(t) = 0 \iff t \in 2\pi\mathbb{Z}\,,$$

cette application est bijective. Notons θ_{t_0} l'application réciproque et montrons qu'elle est continue. Si $t_0 = 0$ alors $\theta = \theta_0$ est continue car donnée explicitement par les fonctions trigonométriques inverses

$$\theta(z) = \begin{cases} \arcsin \mathrm{Im}(z), & \text{pour} \quad x = \mathrm{Re}(z) > 0 \\ \arccos \mathrm{Re}(z), & \text{pour} \quad y = \mathrm{Im}(z) > 0 \\ -\arccos \mathrm{Re}(z), & \text{pour} \quad y = \mathrm{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

En général, $\theta_{t_0}(z) = \theta(e^{-it_0}z) + t_0$, donc θ_{t_0} est continue. □

2.3.2.2. Constructions des fonctions trigonométriques réelles à partir de l'exponentielle complexe.— Définissons *a priori* les fonctions suivantes :

$$a(t) = \mathrm{Re}(e^{it}) \quad \text{et} \quad b(t) = \mathrm{Im}(e^{it}). \tag{17}$$

De sorte que $e^{it} = a(t) + ib(t)$ et $|e^{it}|^2 = a(t)^2 + b(t)^2$. De (17), on déduit :

$$a(t) = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{t^{2p}}{(2p)!} \quad \text{et} \quad b(t) = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} .$$

Le rayon de convergence de ces séries entières est infini et on obtient par dérivation terme à terme

$$a(t)' = -b(t) \quad \text{et} \quad b(t)' = a(t).$$

Les fonctions a, b étant des sommes de séries entières de rayon de convergence infini, elles sont de classe C^1. Comme $a(0) = 1$, il existe $t_1 > 0$ tel que a soit strictement positive sur $[0, t_1[$. Comme $b' = a$, la fonction b est strictement croissante sur $[0, t_1]$. Fixons $t_0 \in]0, t_1[$, alors

$$-a(t_1) + a(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} b(t)dt \geq (t_1 - t_0)b(t_0) > 0.$$

Donc $t_1 - t_0 \leq \dfrac{a(t_0)}{b(t_0)}$. Donc a ne peut rester > 0 sur tout $\mathbb{R}_+$. Notons c_0 son plus petit zéro strictement positif.

Définition 2.3.5. — On note π le nombre $2c_0$.

Théorème 2.3.6. — *L'application $\varphi : \mathbb{R} \ni t \mapsto e^{it} \in C$ est $2\pi-$périodique et surjective sur le cercle unité. Elle est localement un homéomorphisme. Plus précisement, $\forall t_0 \in \mathbb{R}$,*
$\varphi_{|]t_0-\pi, t_0+\pi[} :]t_0 - \pi, t_0 + \pi[\to C \setminus \{-\varphi(t_0)\}$ *est un homéomorphisme.*

Démonstration. —
1) $\varphi = a + ib$: $[0, \frac{\pi}{2}] \to \varphi([0, \frac{\pi}{2}])$ est un homéomorphisme sur le premier quart de cercle, lequel est décrit dans le sens positif :

Par définition, a est strictement positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. Comme $b' = a$, la fonction b est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a $a(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $b(\frac{\pi}{2}) > 0$. Mais $a^2 + b^2 = 1$ donc $b(\frac{\pi}{2}) = 1$. On en déduit que b: $[0, \frac{\pi}{2}] \to [0, 1]$ est une bijection continue strictement croissante. Comme $a' = -b$, on a a: $[0, \frac{\pi}{2}] \to [1, 0]$ est une bijection continue strictement décroissante.

2) Comme φ est un homomorphisme, on déduit que $\varphi : [t_0, t_0 + \frac{\pi}{2}] \to \varphi([t_0, t_0 + \frac{\pi}{2}])$ est un homéomorphisme sur un quart de cercle ($t_0 \in \mathbb{R}$). En particulier :

Soit $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ avec $t = \frac{\pi}{2} + \tau$. Alors $e^{i(\frac{\pi}{2}+\tau)} = i.(e^{i\tau})$ *i.e.* $a(\frac{\pi}{2} + \tau) = -b(\tau)$ et $b(\frac{\pi}{2} + \tau) = a(\tau)$. Donc e^{it} décrit le second quart de cercle quand t décrit l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ et $e^{i\pi} = -1$.

Soit $t \in [\pi, 2\pi]$, avec $t = \pi + \theta$ avec $\theta \in [0, \pi]$. Alors $e^{it} = e^{i(\pi+\theta)} = e^{i\pi}.e^{i\theta} = -e^{i\theta}$. Donc e^{it} décrit le demi-cercle inférieur dans le sens positif quand t décrit $[\pi, 2\pi]$ et $e^{i2\pi} = -e^{i\pi} = 1$.

3) Le nombre 2π est donc le plus petit réel strictement positif dont l'exponentielle vaut l'élément unité de $\mathbb{C}^*$, ce qui prouve que le noyau de l'homomorphisme φ est le sous-groupe additif $2\pi\mathbb{Z}$ et que $\varphi(t + n2\pi) = \varphi(t)$. Ce qui montre la périodicité de φ.

4) On a de plus montré que $\varphi_{|]0,2\pi[} :]0, 2\pi[\to C \setminus \{1\}$ est une bijection continue. Montrons que la bijection réciproque, notée r, est aussi continue :

Sinon, $\exists z \in C\setminus\{1\}$, $\exists \epsilon > 0$ et il existe une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $C\setminus\{1\}$ qui converge vers z tels que $|r(z_n)-r(z)| \geq \epsilon$. $[0, 2\pi]$ étant compact, on peut extraire une sous-suite $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $(r(z_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $t_0 \neq r(z)$. Mais $\varphi(t_0) = \lim_{k\to+\infty} \varphi(r(z_{n_k}) = \lim_{k\to+\infty} z_{n_k} = z \in C\setminus\{1\}$. Donc $t_0 \in [0, 2\pi]\setminus\{0, 2\pi,\ r(z)\}$ est tel que $\varphi(t_0) = \varphi(r(z))$. Ceci contredit l'injectivité de $\varphi_{|]0,2\pi[}$.

5) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. L'application $\varphi_{|]t_0-\pi,t_0+\pi[} :]t_0 - \pi, t_0 + \pi[\to \varphi(]t_0 - \pi, t_0 + \pi[)$ est un homéomorphisme car, sur cet intervalle, $t \mapsto e^{it} = e^{i(t-t_0)}.e^{it_0}$ a pour réciproque $C \setminus \{-\varphi(t_0)\} \ni z \mapsto r(ze^{i(t_0}) - t_0$ qui est continue. □

2.3.2.3. Retour aux fonctions trigonométriques. — . On peut d'aprés le théorème précédent paramétrer le cercle unité par $[0, 2\pi[\ni t \mapsto e^{it}$. Si on munit $\mathbb{C}$ de sa métrique euclidienne, la longueur de l'arc décrit par $t \in [t_0, t_1]$ est $\int_{t_0}^{t_1} ||\frac{d}{dt}\varphi(t)||dt = \int_{t_0}^{t_1} |e^{it}|dt = t_1 - t_0$. Donc $t_1 - t_0$ est la longueur de l'arc décrit sur C (qui est aussi la mesure en radian de l'angle balayé).

En particulier si $t_1 = t_0 + 2\pi$, on trouve que 2π est la longueur du cercle unité dans le plan euclidien.

Prenons $t_0 = 0$, alors $z = e^{it}$ est le point du cercle unité tel que la longueur de l'arc $(1, z)$ est t. C'est aussi la mesure de l'angle (Ox, Oz). Ses coordonnées $\cos t$ et $\sin t$ sont bien les réels $a(t)$ et $b(t)$.

Il est à noter que les formules classiques de trigonométrie s'obtiennent à partir des propriétés de l'exponentielle complexe. Par exemple :

$$\cos(a + b) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i(a+b)}}) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{ia}}\mathrm{e}^{\mathrm{ib}}) = \mathrm{\cos a \cos b - \sin a \sin b},$$

$$\sin 3a = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{3\mathrm{ia}}) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{ia}})^3 = \mathrm{3\cos^2 a \sin a - \sin^3 a = \sin a(3 - 4\sin^2 a)}.$$

2.3.3. Fonctions trigonométriques complexes. — On définit les fonctions circulaires complexes par les formules d'Euler :

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

de sorte que

$$\cos z = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!} \quad \text{et} \quad \sin z = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Notons que $\cos(z) = \mathrm{ch}(iz)$ et $i \sin z = \mathrm{sh} iz$, où

$$\mathrm{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

définissent le prolongement au plan complexe des fonctions ch et sh. En particulier, les fonctions circulaires complexes sont non bornées, 2π-périodiques. Par exemple, $|\cos(x + iy)|^2 = \cos^2(x) + \mathrm{sh}^2(y)$.

2.4. Arguments et Logarithmes d'un nombre complexe

Lemme 2.4.1. — $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ *est surjective et $2i\pi$-périodique :*

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \quad \exists w \in \mathbb{C} \quad \textit{tel que } e^w = z$$
$$\forall w, w' \in \mathbb{C}, \quad e^w = e^{w'} \iff w - w' \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Démonstration. — Si $z \neq 0$, alors $\frac{z}{|z|} \in$ C. D'après le théorème 2.3.6, il existe $t \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π, tel que $e^{it} = \frac{z}{|z|}$. Pour montrer le deuxième point, on note que si $w - w' = x + iy$ est tel que $e^{w-w'} = 1$ alors $x = 0$ et $y \in 2\pi\mathbb{Z}$. □

Définition 2.4.2. — On appelle logarithme d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ tout nombre $w \in \mathbb{C}$ tel que $e^w = z$.
On appelle argument d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ tout nombre $t \in \mathbb{R}$ tel que $e^{it} = \frac{z}{|z|}$.

Donc $w = x + iy$ est un logarithme de $z \in \mathbb{C}^*$ ssi $x = ln|z|$ et y est un argument de z.

Définition 2.4.3. — Soit X une partie de $\mathbb{C}^*$. Une fonction continue $L : X \to \mathbb{C}$ est une *détermination continue du logarithme* (en abrégé dcl) si $\forall z \in X$, $e^{L(z)} = z$. Une fonction continue $\theta : X \to \mathbb{R}$ est une *détermination continue de l'argument* (en abrégé dca) si $\forall z \in X$, $e^{i\theta(z)} = \frac{z}{|z|}$.

Donc L est une dcl ssi $\forall z \in X$, $L(z) = ln|z| + i\theta(z)$ avec θ une détermination continue de l'argument.

Définition 2.4.4. — Soit $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. On note $Arg(z)$ l'unique argument de z qui appartiennent à $]-\pi, \pi[$. Alors $Arg : \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \to]-\pi, \pi[$ est une détermination continue de l'argument appelé argument principal. On appelle logarithme principal la fonction

$$Log : \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \ni z \mapsto Log(z) = ln|z| + iArg(z) \in \mathbb{C} .$$

Démonstration. —
Soit $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. De sorte que $\frac{z}{|z|} \in C \setminus \{e^{-i\pi}\}$. D'après le théorème 2.3.6, $]-\pi, \pi[\ni t \mapsto e^{it} \in C \setminus \{e^{-i\pi}\}$ est un homéomorphisme. Notons r son inverse. Alors $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0] \ni z \mapsto r(\frac{z}{|z|})$ est continue et vérifie $z = |z|e^{ir(\frac{z}{|z|})}$. □

Notons que si $p \in]-\infty, 0[$ alors

$$\lim_{\substack{z \to p \\ \mathrm{Im}(z) > 0}} Log(z) = ln|p| + i\pi \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{z \to p \\ \mathrm{Im}(z) < 0}} Log(z) = ln|p| - i\pi.$$

Proposition 2.4.5. — *Soit X une partie de $\mathbb{C}^*$ et $L : X \to \mathbb{C}$ une détermination continue du logarithme. Alors*

1. *Si X est connexe, les dcl sur X sont de la forme $L + 2i\pi k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.*
2. *$e^{L(z)} = z$ pour tout $z \in X$.*
3. *Si Ω est connexe et $\exp : \Omega \to X$ alors $z \mapsto L(e^z) - z$ est constante à valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$.*

Démonstration. —

1. En effet, si L' est une autre dcl sur X, $\forall z \in X$, $L(z) - L'(z) \in 2i\pi\mathbb{Z}$ donc $\dfrac{L - L'}{2i\pi} : X \to \mathbb{Z}$. Cette application étant continue, elle est constante.
3. De même, $\Omega \ni z \mapsto L(e^z) - z$ est une application continue à valeurs dans $2i\pi\mathbb{Z}$. Elle est constante si Ω est connexe. □

Remarque 2.4.6. —
La formule $e^z = e^x e^{iy}$ montre que l'exponentielle applique les droites horizontales $\{y = \alpha\}$ en les demi-droites $D_\alpha =]0, +\infty[\cdot e^{i\alpha}$ et les droites verticales $\{x = \beta\}$ sur des cercles $C(0, e^\beta)$.
Les propriétés de l'exponentielle entrainent que

$$\exp : B = \{-\pi + t_0 < \mathrm{Im(z)} < \mathrm{t_0} + \pi\} \to \mathbb{C} \setminus \mathrm{D_{t_0 - \pi}}$$

est une bijection continue. C'est même un difféomorphisme car $(e^z)' = e^z$ ne s'annule jamais. La fonction réciproque est une dcl sur $\mathbb{C} \setminus D_{t_0-\pi}$. Si on la note $log_{t_0-\pi}$, on vérifie que $log_{t_0-\pi}(z) = Log(e^{-it_0}z) + it_0$.

Lemme 2.4.7. —

1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^*$ et $L : \Omega \to \mathbb{C}$ une dcl sur Ω. Alors L est holomorphe sur Ω et $L'(z) = \dfrac{1}{z}$.*
2. *Réciproquement, si Ω est connexe : Soit F une primitive de $z \mapsto \dfrac{1}{z}$, alors il existe $c \in \mathbb{C}$ telle que $F + c$ est une dcl sur Ω.*

Démonstration. —

1) En effet si $z_0 \in \Omega$,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{L(z) - L(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \frac{L(z) - L(z_0)}{e^{L(z)} - e^{L(z_0)}} = \lim_{w\to L(z_0)} \frac{w - L(z_0)}{e^w - e^{L(z_0)}} = \frac{1}{e^{L(z_0)}} = \frac{1}{z_0}$$

car L est continue (deuxieme égalité).

2) Comme $z \mapsto ze^{-F(z)} \in \mathbb{C}^*$ est de dérivée nulle sur Ω connexe, elle est égale à une constante non nulle $b = e^c$. Donc $ze^{-F(z)} = e^c$ et $F + c$ est bien une dcl sur Ω. □

Corollaire 2.4.8. — $\forall z \in D(0,1)$, $Log(1 + z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$.

Démonstration. — En effet la série entière de droite est convergente sur $D(0,1)$ et définit une fonction $L : D(0,1) \to \mathbb{C}$ qui est dérivable telle que

$$L'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}z^{n-1} = \frac{1}{1+z} = Log'(1 + z).$$

Le disque étant connexe, $L - Log$ est constante. Or elle est nulle en l'origine car $Log(1) = 0$. □

Corollaire 2.4.9. — *Soit $L : \Omega \to \mathbb{C}$ une dcl sur Ω. Alors L est analytique sur Ω. De plus $\forall z_0 \in \Omega$, soit $0 < \epsilon \leq |z_0|$ tel que $D(z_0, \epsilon) \subset \Omega$. Alors*

$$\forall z \in D(z_0, \epsilon),\ L(z) = L(z_0) + Log\left(1 + \frac{z - z_0}{z_0}\right).$$

Démonstration. — On vérifie que $D(z_0, |z_0|) \ni z \mapsto L_1(z) = L(z_0) + Log(1 + \frac{z - z_0}{z_0})$ est une dcl. Or $L_1(z_0) = L(z_0)$. Donc $L_{|D(z_0,\epsilon)} = L_1$. Comme L_1 est somme d'une série entière de la variable $z - z_0$ (corollaire précédent), L est analytique. □

Pour chaque complexe non nul, on peut choisir un logarithme (ou un argument). En général, on ne peut pas faire ce choix de manière continue, par exemple sur $\mathbb{C}^*$ ou sur le cercle unité C :

Théorème 2.4.10. — *Il n'existe pas de détermination continue de l'argument définie sur* $\mathbb{C}$.

Démonstration. — Sinon soit $\theta : C \to \mathbb{R}$ une telle détermination. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{it} = e^{i\theta(e^{it})}$, donc $t - \theta(e^{it}) \in 2\pi\mathbb{Z}$. La fonction $a : \mathbb{R} \ni t \mapsto \frac{t - \theta(e^{it})}{2\pi} \in \mathbb{Z}$ serait continue à valeurs dans $\mathbb{Z}$ donc constante ($a(\mathbb{R})$ étant une partie connexe de $\mathbb{Z}$ est un singleton). Mais $\frac{-\theta(1)}{2\pi} = a(0) = a(2\pi) = \frac{2\pi - \theta(1)}{2\pi}$ est faux. □

2.4.1. Déterminations continues des puissances. — Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Si w un logarithme de z, alors $e^{\alpha w}$ est par définition une détermination de la puissance α de z. L'ensemble des déterminations de la puissance α de z, noté $\{z^\alpha\}$, est donc $\{e^{\alpha w + 2ik\pi\alpha}, k \in \mathbb{Z}\}$. Par exemple $\{z^i\} = \{e^{iw}e^{-2k\pi}, k \in \mathbb{Z}\}$.

Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, cet ensemble est un singleton du fait de la périodicité de l'exponentielle. Dans ce cas z^α est égale à la puissance telle que définie par le calcul algébrique.

Définition 2.4.11. — Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On appelle détermination continue de la puissance α une fonction continue $g : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $\forall z \in \Omega,\ g(z) \in \{z^\alpha\}$.

S'il existe sur Ω une détermination continue du logarithme $L : \Omega \to \mathbb{C}$ alors $e^{\alpha L}$ est une détermination continue de la puissance α. Cette détermination est holomorphe et vérifie

$$(e^{\alpha L(z)})' = \frac{1}{z}\alpha e^{\alpha L(z)} = \alpha e^{(\alpha-1)L(z)}.$$

Exemple 2.4.12. — Sur $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, on définit la détermination principale de la puissance α par $z \mapsto e^{\alpha Log(z)} = DP(z^\alpha)$. Si $\alpha = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, alors $DP(z^\alpha) = e^{\alpha ln|z| - b\theta(z)}e^{i(bln|z| + a\theta(z))}$. De sorte que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $Dp(z^\alpha) = |z|^\alpha e^{i(\alpha\theta(z))}$.

CHAPITRE 3

L'INTÉGRALE DE CAUCHY ET ANALYTICITÉ DES FONCTIONS HOLOMORPHES

3.1. L'intégrale de Cauchy

3.1.1. Rappel : Intégration d'une fonction continue à valeurs complexes. — Soit $f : [t_0, t_1] \ni t \mapsto f(t) = \mathrm{Re}\,\mathrm{f(t)} + \mathrm{iIm}\,\mathrm{f(t)}$ une fonction continue à valeurs complexes. On pose

$$\int_{[t_0,t_1]} f(t)dt := \int_{[t_0,t_1]} \mathrm{Re}\,\mathrm{f(t)dt} + \mathrm{i} \int_{[t_0,t_1]} \mathrm{Im}\,\mathrm{f(t)dt}\,.$$

On vérifie que :

$$f \mapsto \int_{[t_0,t_1]} f(t)dt \text{ est } \mathbb{C}-\text{linéaire,}$$

$$\mathrm{Re} \int_{[t_0,t_1]} \mathrm{f(t)dt} = \int_{[t_0,t_1]} \mathrm{Re}\,\mathrm{f(t)dt} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im} \int_{[t_0,t_1]} \mathrm{f(t)dt} = \int_{[t_0,t_1]} \mathrm{Im}\,\mathrm{f(t)dt}\,,$$

$$|\int_{[t_0,t_1]} f(t)dt| \leq \int_{[t_0,t_1]} |f(t)|dt\,.$$

Montrons la dernière propriété. C'est vraie si l'intégrale est nulle, sinon écrivons $\int_{[t_0,t_1]} f(t)dt = \rho e^{i\theta}$. Alors

$$\begin{aligned} |\int_{[t_0,t_1]} f(t)dt| &= e^{-i\theta} \int_{[t_0,t_1]} f(t)dt &= \mathrm{Re} \int_{[t_0,t_1]} \mathrm{e^{-i\theta}f(t)dt} \\ &= \int_{[t_0,t_1]} \mathrm{Re(e^{-i\theta}f)(t)dt} &\leq \int_{[t_0,t_1]} |f(t)|dt\,. \end{aligned}$$

Définition 3.1.1. — Un *chemin* c dans $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un arc $c : [t_0, t_1] \to \Omega$ de classe C^1 par morceaux (on note C^1_{pm}).

On entend par là qu'il existe une subdivision $t_0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_N = t_1$ de $[t_0, t_1]$ telle que la restriction de c à chacun des segments $[s_k, s_{k+1}]$, $k = 0, \ldots, N-1$, soit de classe C^1. Si $f : \langle c \rangle \to \mathbb{C}$ est continue, les intégrales

$$\int_{s_k}^{s_{k+1}} f(c(t))c'(t)\,dt$$

sont bien définies pour $k = 0, \ldots, N-1$ ($c'(s_k)$ et $c'(s_{k+1})$ sont les dérivées, respectivement à droite et à gauche de c en s_k et s_{k+1}). Par définition :

$$\int_{t_0}^{t_1} f(c(t))c'(t)\,dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} f(c(t))c'(t)\,dt,$$

bien qu'en toute rigueur, c' ne soit pas définie aux points de la subdivision.

Définition 3.1.2. — Soit $c : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ un chemin et $f : \langle c \rangle \to \mathbb{C}$ une fonction continue. L'intégrale (de Cauchy) de f sur c est notée et définie par :

$$\int_c f(z)\,dz := \int_{t_0}^{t_1} f(c(t))c'(t)\,dt. \tag{18}$$

On a alors, comme en analyse réelle, la formule :

Lemme 3.1.3. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $F \in \mathcal{O}(\Omega)$. Notons $f = F'$ sa $\mathbb{C}$-dérivée. Alors, pour tout chemin c de a à b dans Ω, on a :*

$$F(b) - F(a) = \int_c f(z)dz.$$

Démonstration. — Nous admettons pour le moment que $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ entraine que F est de classe $C^1(\Omega)$, donc l'intégrale de Cauchy de F' est bien définie.

Soit $c\colon [t_0, t_1] \to \Omega$ un chemin. Si $t, t+h \in [t_0, t_1]$ et c est dérivable en t,

$$\begin{aligned}(F \circ c)(t+h) &= F(c(t) + c'(t)h + |h|\epsilon(h)) \\ &= F(c(t)) + F'(c(t))c'(t)h + |h|\epsilon(h).\end{aligned}$$

Il en résulte que $F \circ c$ est de classe C^1 par morceaux sur $[t_0, t_1]$, de dérivée :

$$(F \circ c)' = (F' \circ c)c'. \tag{19}$$

Donc

$$\int_c f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} F'(c(t))c'(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} (F \circ c)'(t)dt = F(c(t_1) - F(c(t_0)) = F(b) - F(a)\,.$$

□

Définition 3.1.4. — Deux chemins $c : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ et $d : [s_0, s_1] \to \mathbb{C}$ sont *équivalents* s'il existe une bijection strictement croissante

$$\phi : [t_0, t_1] \to [s_0, s_1],$$

telle que ϕ et ϕ^{-1} sont de classe C^1_{pm} et que $c = d \circ \phi$.

Deux chemins équivalents ont en particulier la même origine, la même extrémité et la même image.

Lemme 3.1.5. — *Soit c et d deux chemins équivalents dans $\mathbb{C}$. Pour toute fonction continue $f : \langle c \rangle \to \mathbb{C}$, on a :*

$$\int_c f(z)\,dz = \int_d f(z)\,dz.$$

Démonstration. — Soit $c = d \circ \phi$, comme dans la définition. Par subdivision, on se ramène au cas où toutes les données sont de classe C^1. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_{d\circ\phi} f(z)\,dz &= \int_{t_0}^{t_1} (f\circ d)(\phi(t))d'(\phi(t))\phi'(t)\,dt \\
&= \int_{\phi(t_0)}^{\phi(t_1)} (f\circ d)(t)d'(t)\,dt \\
&= \int_{s_0}^{s_1} (f\circ d)(t)d'(t)\,dt = \int_d f(z)\,dz.
\end{aligned}$$

□

Définition 3.1.6. — Le chemin opposé $\mathrm{opp}(c)$ d'un chemin $c : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ est le chemin $[t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ défini par :

$$\mathrm{opp}(c)(t) = c \circ \phi(t),$$

où ϕ est l'unique isomorphisme affine décroissant de $[t_0, t_1]$ sur $[t_0, t_1]$.

« C'est le même chemin parcouru dans l'autre sens ». La démonstration précédente, avec cette fois $\phi(t_0) = t_1$ et $\phi(t_1) = t_0$, donne :

Lemme 3.1.7. — *Pour tout chemin c dans $\mathbb{C}$ et toute fonction continue $f : \langle c\rangle \to \mathbb{C}$, on a :*

$$\int_{\mathrm{opp(c)}} f(z)\,dz = -\int_c f(z)\,dz.$$

La longueur $\mathrm{L}(c)$ d'un chemin $c : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ est définie par

$$\mathrm{L}(c) = \int_{t_0}^{t_1} |c'(t)|\,dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} |c'(t)|\,dt\,.$$

Le théorème de changement de variable montre que deux chemins équivalents ont même longueurs. On obtient l'estimation suivante en revenant à la la paramétrisation du chemin c :

Lemme 3.1.8. — *Pour tout chemin c dans $\mathbb{C}$ et toute fonction continue $f : \langle c\rangle \to \mathbb{C}$, on a :*

$$\left|\int_c f(z)\,dz\right| \leq \mathrm{L}(c) \sup_{z\in\langle c\rangle} |f(z)|.$$

Démonstration. — En effet :

$$|f(c(t))c'(t)| \leq |c'(t)| \sup_{z\in\langle c\rangle} |f(z)|$$

et on obtient le résultat en intégrant. □

Ce lemme permet d'étudier la permutation d'une intégrale (de Cauchy) et d'un passage à la limite *sans revenir à la paramétrisation.* On a par exemple :

Corollaire 3.1.9. — *Soit $c : [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ un chemin. Si $f_n \in C^0(\langle c\rangle)$ converge uniformément vers f,*

$$\int_c f_n(z)\,dz \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_c f(z)\,dz.$$

Démonstration. — En effet :

$$\left|\int_c f_n(z)\,dz - \int_c f(z)\,dz\right| \leq \mathrm{L}(c) \sup_{\langle c\rangle} |f_n - f|.$$

□

Si c_0 et c_1 sont deux chemins tels que l'extrémité de c_0 est égale à l'origine de c_1, si f est continue sur $\langle c_0 \mathrm{v} c_1\rangle$ alors

$$\int_{c_0 \mathrm{v} c_1} f(z)\,dz = \int_{c_0} f(z)\,dz + \int_{c_1} f(z)\,dz$$

Définition 3.1.10. —

1) Soient $a, b \in \mathbb{C}$, alors $c : [0,1] \ni t \to a + t(b-a)$ est (par définition) une parmétrisation du segment orienté $[a,b]$. Tout chemin équivalent à c est (par définition) une paramétrisation du segment $[a,b]$.
2) Si $a_1, \ldots, a_n$ est une suite finie de points de $\mathbb{C}$, on définit une paramétrisation c de l'arc polygonal $[a_1, \ldots, a_n] = [a_1, a_2] \cup \ldots \cup [a_{n-1}, a_n]$ par la juxtaposition $c = c_1 \mathrm{v} \ldots \mathrm{v} c_{n-1}$ des paramétrisations c_i des segments $[a_i, a_{i+1}]$.
3) Si f est continue sur $[a_1, \ldots, a_n]$, l'intégrale de Cauchy de f le long de $[a_1, \ldots, a_n]$ est par définition $\int_c f(z)dz$ avec c une paramétrisation de $[a_1, \ldots, a_n]$. Elle ne dépend pas de la paramétrisation de cet arc et est notée $\int_{[a_1,\ldots,a_n]} f(z)\,dz$. On a

$$\int_{[a_1,\ldots,a_n]} f(z)\,dz = \int_{[a_1,a_2]} f(z)\,dz + \cdots + \int_{[a_{n-1},a_n]} f(z)\,dz.$$

Le lemme suivant se démontre comme le théorème 1.8.14

Lemme 3.1.11. — *Un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est connexe si et seulement si $\forall\{a, b\} \subset \Omega$, il existe un arc polygonal $[a, a_1, \ldots, a_n, b]$ de a à b contenu dans Ω.*

3.2. Conditions pour l'existence d'une primitive

Une fonction holomorphe est une fonction dérivable (au sens complexe). Il est naturel d'introduire la notion de primitive :

Définition 3.2.1. — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction, une *primitive* de f est une fonction $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ de dérivée f.

Le problème se pose de savoir si une fonction donnée, par exemple continue, possède une primitive. On sait que ce problème a une réponse positive dans le cadre des fonctions d'une variable réelle. La situation dans le domaine complexe est complètement différente. Il y a d'abord des « obstructions analytiques » :

Lemme 3.2.2. — *Si une fonction $f \in C^1(\Omega)$ possède une primitive, f est holomorphe.*

Démonstration. — En effet, soit F une fonction holomorphe, et supposons que $f = F'$ est de classe C^1. On a (équations de Cauchy-Riemann) :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0; \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} - i\frac{\partial F}{\partial y}\right) = f.$$

Donc :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f; \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = if.$$

La fonction F, qui a des dérivées partielles de classe C^1, est de classe C^2. Compte tenu du Théorème de Schwarz,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}.$$

On calcule alors :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(-i\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + i\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\right) = 0.$$

□

Le « bon cadre » pour résoudre le problème des primitives est donc celui des fonctions holomorphes.

Il y a une autre obstruction, dont on verra qu'elle est de « nature topologique ».

Théorème 3.2.3. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in C^0(\Omega)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) *f a une primitive sur Ω,*
2) *l'intégrale de Cauchy de f sur tout chemin fermé dans Ω est nulle,*
3) *l'intégrale de Cauchy de f sur tout arc polygonal fermé dans Ω est nulle.*

Démonstration. —
(1) ⇒ (2) découle du lemme 3.1.3. En effet, si F est une primitive de f et $c\colon [t_0, t_1]$ est un chemin fermé, d'après ce lemme on a $\int_c f(z)dz = F(c(t_1)) - F(c(t_0)) = 0$.

(2) ⇒ (3) est évident.

On suppose (3). Quitte à remplacer Ω par une de ses composantes connexes, on peut supposer Ω connexe et non vide ; soit $a \in \Omega$. À tout point $z \in \Omega$, on associe un arc polygonal c_z de a à z dans Ω. On définit la fonction $F : \Omega \to \mathbb{C}$ par :

$$F(z) = \int_{c_z} f(\zeta)\, d\zeta.$$

Le point crucial est que la valeur $F(z)$ ne dépend pas du choix de c_z car, si $[a, b_1, \ldots, b_p, z]$ et $[a, c_1, \ldots, c_q, z]$ sont deux arcs polygonaux de a à z dans Ω, $[a, b_1, \ldots, b_p, z, c_q, \ldots, c_1, a]$ est un arc polygonal fermé. Donc :

$$\int_{[a,b_1,\ldots,b_p,z]} f(z)\, dz - \int_{[a,c_1,\ldots,c_q,z]} f(z)\, dz = \int_{[a,\ldots,a]} f(z)\, dz = 0$$

par hypothèse.

Soit maintenant $D(z,r) \subset \Omega$ et $[a,\dots,z]$ un arc polygonal de a à z dans Ω. Si $|h| < r$, $[a,\dots,z,z+h]$ est un arc polygonal de a à $z+h$ dans Ω. 0n a :

$$\begin{aligned}|F(z+h)-F(z)-f(z)h| &= \left|\int_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta - f(z)\int_{[z,z+h]} d\zeta\right| \\ &\leq |h| \sup_{|\zeta - z|\leq |h|} |f(\zeta)-f(z)|.\end{aligned}$$

Comme f est continue en z, le dernier membre est de la forme $|h|\epsilon(h)$: F est dérivable en z de dérivée $f(z)$. □

Appliquons ceci à une fraction rationnelle R. Pour chercher une primitive de R, on peut se ramener, en la décomposant en éléments simples, au cas où R est un polynôme (la solution est alors évidente) ou un élément simple :

$$R(z) = \frac{1}{(z-a)^p}\ , \qquad a \in \mathbb{C}\,,\ \ p \in \mathbb{N}^*.$$

Si $p \geq 2$, R admet $(z-a)^{1-p}/(1-p)$ comme primitive sur $\mathbb{C}\setminus\{a\}$. Le cas d'un pôle simple n'est pas si simple :

Lemme 3.2.4. — *Si $a \in \mathbb{C}$ est un pôle simple de la fraction rationnelle R, R n'admet de primitive dans aucun voisinage ouvert épointé de a.*

Démonstration. — Supposons que $F \in \mathcal{O}(D(a,r)\setminus\{a\})$ soit une primitive de R. Pour $0 < s < r$, on applique la formule (3.1.3) à l'arc

$$0 \leq t \leq 2\pi, \qquad c(t) = a + se^{it}.$$

On obtient :

$$F(c(2\pi)) - F(c(0)) = \int_0^{2\pi} \frac{ise^{it}}{se^{it}}\,dt = i2\pi.$$

Mais le premier membre est nul. □

Notons qu'une fonction analytique admet toujours localement une primitive : Si $f \in A(\Omega)$ est sur $D(a,r) \subset \Omega$ somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n$ alors

$$D(a,r) \ni z \to F(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}\,,$$

la primitive terme à terme de cette série entière, définit une primitive holomorphe de f sur $D(a,r)$.

3.3. La théorie de Cauchy sur un ouvert convexe

Définition 3.3.1. — Une partie X de $\mathbb{C}$ est *convexe* si, pour tout a, $b \in X$, le segment $[a,b]$ est contenu dans X.

On laisse la démonstration des propriétés suivantes (faciles mais importantes) au lecteur :

1. Un convexe est connexe.

2. Un disque (ouvert ou fermé) est convexe.
3. Un demi-plan (ouvert ou fermé) (définition ?) est convexe.
4. L'intersection d'une famille de convexes est convexe.
5. L'intérieur d'un convexe est convexe.
6. L'adhérence d'un convexe est convexe.

La propriété 4. permet la définition suivante :

Définition 3.3.2. — *L'enveloppe convexe* de $X \subset \mathbb{C}$ est l'intersection de tous les convexes de $\mathbb{C}$ qui contiennent X. C'est « le plus petit convexe de $\mathbb{C}$ qui contient X ».

Le lemme suivant est crucial. La première partie de l'énoncé résout le problème des primitives sur un ouvert convexe, mais la précision apportée par la deuxième partie est indispensable pour démontrer la formule de Cauchy.

***Lemme 3.3.3* (Goursat).** — *Soit Ω un ouvert* convexe *de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. On a :*

$$\int_{[a,b,c,a]} f(z)\,dz = 0$$

pour tout a, b, $c \in \Omega$. De plus, le résultat reste vrai si f est continue sur Ω et dérivable en tout point de Ω, sauf peut-être un*.*

Remarque 3.3.4. — Il peut être utile de remarquer, pour ceux qui connaissent la théorie de l'intégration des formes différentielles dans le plan, que *si la fonction f est supposée de classe C^1*, le lemme précédent est une conséquence de la formule de Green-Riemann [(1)]. Dans l'énoncé, on suppose seulement que f est dérivable : on ne suppose pas que f' soit continue.

Démonstration. — On démontre d'abord la première partie.

Soit a', b', c' les milieux respectifs des segments $[b,c]$, $[c,a]$ et $[a,b]$. Dans le calcul suivant, on omet d'écrire l'intégrant $f(z)dz$:

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b,c,a]} &= \int_{[a,b]} + \int_{[b,c]} + \int_{[c,a]} \\
&= \int_{[a,c']} + \int_{[c',b]} + \int_{[b,a']} + \int_{[a',c]} + \int_{[c,b']} + \int_{[b',a]} \\
&= \left(\int_{[a,c']} + \int_{[b',a]}\right) + \left(\int_{[c',b]} + \int_{[b,a']}\right) + \left(\int_{[a',c]} + \int_{[c,b']}\right) \\
&= \left(\int_{[a,c',b',a]} + \int_{[b',c']}\right) + \left(\int_{[c',b,a',c']} + \int_{[c',a']}\right) + \left(\int_{[a',c,b',a']} + \int_{[a',b']}\right) \\
&= \int_{[a,c',b',a]} + \int_{[c',b,a',c']} + \int_{[a',c,b',a']} + \int_{[a',b',c',a']} .
\end{aligned}$$

C'est plus clair sur un dessin ! Ce calcul est correct car tout les arcs sur lesquels on intègre sont contenus dans Ω, puisque Ω est convexe.

1. Voir Cartan, *opus cité*, pour la relation entre l'intégrale de Cauchy et l'intégrale des formes différentielles.

On a décomposé l'intégrale initiale en la somme de quatre intégrales du même type, dans lesquelles le triangle initial est remplacé par des triangles semblables, dans des similitudes de rapport 1/2. Posons :

$$M := \left| \int_{[a,b,c,a]} f(z)\, dz \right|.$$

Parmi les quatre triangles qu'on a introduits, il en existe au moins un, dont on note les sommets a_1, b_1, c_1, tel qu'on ait :

$$\left| \int_{[a_1,b_1,c_1,a_1]} f(z)\, dz \right| \geq \frac{M}{4}.$$

On peut continuer indéfiniment cette construction. Si L désigne la longueur et D le diamètre du triangle initial, on obtient ainsi une suite de « triangles pleins » (les enveloppes convexes des sommets) emboîtés de sommets a_n, b_n, c_n, de longueurs $L/2^n$ et de diamètres $D/2^n$, tels que :

$$\left| \int_{[a_n,b_n,c_n,a_n]} f(z)\, dz \right| \geq \frac{M}{4^n}.$$

Il est clair que les suites a_n, b_n, c_n convergent vers un point $d \in \Omega$. Comme f est dérivable en d, on a le développement limité :

$$f(z) = f(d) + f'(d)(z-d) + |z-d|\epsilon(z-d).$$

Comme $\int_{[a_n,b_n,c_n,a_n]} dz = 0$ et $\int_{[a_n,b_n,c_n,a_n]} (z-d)\, dz = 0$ (les polynômes holomorphes ont des primitives), l'intégrale de f sur $[a_n, b_n, c_n, a_n]$ se réduit à l'intégrale du dernier terme. On en déduit :

$$\left| \int_{[a_n,b_n,c_n,a_n]} f(z)\, dz \right| \leq D_n L_n \epsilon_n$$

où $\epsilon_n \to 0$ et D_n et L_n sont respectivement le diamètre et la longueur du triangle de sommets a_n, b_n, c_n. On a donc :

$$M \leq \epsilon_n \times (LD)$$

donc $M = 0$, et le résultat.

S'il existe un point $\alpha \in \Omega$ tel que f soit continue mais ne soit pas dérivable en α, on distingue plusieurs cas :

- Si α n'appartient pas à l'enveloppe convexe de a, b, c, la démonstration précédente s'applique.
- Sinon, on décompose $\int_{[a,b,c,a]}$ en une somme d'intégrales du même type, appartenant soit au premier cas, soit au suivant.
- Si $\alpha = a$, on décompose $\int_{[\alpha,b,c,\alpha]}$ en la somme d'intégrales qui rentrent dans le premier cas, donc nulles, et d'une intégrale $\int_{[\alpha,b',c',\alpha]}$, sur un arc de longueur aussi petite qu'on veut. Cette intégrale est aussi petite qu'on veut.

□

On peut maintenant démontrer :

***Théorème 3.3.5* (Théorème de Cauchy, pour un convexe).** — *Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$. Toute fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ a une primitive sur Ω. Le résultat reste vrai si $f \in C^0(\Omega)$ est dérivable en tout point de Ω, sauf peut-être un.*

Démonstration. — Compte tenu du Théorème 3.2.3, il suffit de montrer que

$$\int_{[a_1,\dots,a_N,a_1]} f(z)\, dz = 0$$

pour tout $a_1, \dots, a_N \in \Omega$. C'est vrai si $N = 2$, et c'est vrai si $N = 3$ d'après le Lemme de Goursat. Si $N \geq 4$ et compte tenu du fait que Ω est convexe,

$$\int_{[a_1,\dots,a_N,a_1]} f(z)\, dz = \int_{[a_1,a_2,a_3,a_1]} f(z)\, dz + \int_{[a_1,a_3,\dots,a_N,a_1]} f(z)\, dz,$$

car les images des arcs sur lesquels on intègre sont contenues dans Ω. On en déduit le résultat par récurrence sur N. □

Définition 3.3.6. — Soit c un chemin fermé dans $\mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \langle c \rangle$; on note et on définit :

$$\text{Ind}(c, z) := \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{20}$$

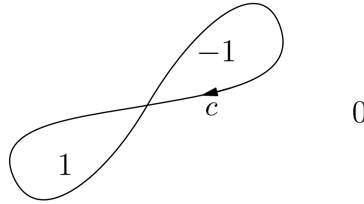
C'est *l'indice de c par rapport à $z \notin \langle c \rangle$*, ou *l'indice de $z \notin \langle c \rangle$ par rapport à c.*

***Théorème 3.3.7* (Formule de Cauchy, pour un convexe).** — *Soit Ω un ouvert convexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Pour tout chemin fermé c dans Ω et tout $z \notin \langle c \rangle$, on a :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \text{Ind}(c, z) f(z). \tag{21}$$

Avant de prouver ce théorème (qui est un des plus grands théorèmes du XIXème siècle !), commençons par donner une interprétation géométrique de l'indice.

Proposition 3.3.8. — *Soit $c\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ un chemin fermé. La fonction $\mathbb{C} \setminus \langle c \rangle \ni z \mapsto \text{Ind}(c, z)$ est continue, à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Elle est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \langle c \rangle$, et nulle sur la composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus \langle c \rangle$.*



Démonstration. — La continuité de la fonction $z \mapsto \text{Ind}(c, z)$ découle de la continuité de la fonction $(t, z) \mapsto \dfrac{c'(t)}{c(t) - z}$ et du théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (ou plus précisément, du corollaire 3.1.9).

Ensuite, prouver que le nombre $\text{Ind}(c, z)$ est entier revient à montrer que

$$\exp\left(\int_{t_0}^{t_1} \frac{c'(t)\, dt}{c(t) - z} \right) = 1.$$

Notons donc $\varphi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} \frac{c'(t)\,dt}{c(t)-z}\right)$. En dérivant φ, on obtient : $\varphi'(t) = \frac{c'(t)}{c(t)-z}\varphi(t)$, donc on a

$$\frac{\varphi'(t)(c(t)-z) - \varphi(t)c'(t)}{(c(t)-z)^2} = 0,$$

sur chaque segment $[s_k, s_{k+1}]$ de la subdivision de $[t_0, t_1]$ où c est de classe C^1. Ainsi la fonction $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{c(t)-z}$ est constante sur chaque segment de la subdivision, donc constante sur $[t_0, t_1]$. On a donc $\frac{\varphi(t_0)}{c(t_0)-z} = \frac{\varphi(t_1)}{c(t_1)-z}$, or $c(t_0) = c(t_1)$, donc $\varphi(t_1) = \varphi(t_0) = \exp(0) = 1$. L'indice est donc bien à valeurs entières.

La fonction continue $z \mapsto \mathrm{Ind}(c, z)$ est à valeurs entières donc d'après le lemme 1.8.6, elle est constante sur les composantes connexes de $\Omega \smallsetminus \langle c\rangle$. Enfin, quitte à prendre $|z|$ assez grand on peut rendre $\left|\frac{c'(t)}{c(t)-z}\right|$ aussi petit que l'on veut, indépendemment de $t \in [t_0, t_1]$ où c est dérivable. En particulier, pour $|z|$ assez grand on a $|\mathrm{Ind}(c, z)| < 1$, donc $\mathrm{Ind}(c, z) = 0$ sur la composante connexe non bornée de $\Omega \smallsetminus \langle c\rangle$. □

Nous allons maintenant prouver le théorème 3.3.7.

Démonstration. — On écrit :

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} + \frac{f(z)}{\zeta - z}.$$

Par définition de l'indice :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta = \mathrm{Ind}(c, z) f(z).$$

D'autre part, le point $z \notin \langle c\rangle$ étant fixé, on définit la fonction $g_z : \Omega \to \mathbb{C}$

$$g_z(\zeta) = \begin{cases} (f(\zeta) - f(z))/(\zeta - z) & \text{si } \zeta \neq z, \\ f'(z) & \text{si } z \in \Omega \text{ et } \zeta = z. \end{cases}$$

La fonction g_z est continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega\backslash\{z\}$. D'après la deuxième partie du Théorème de Cauchy, $\int_c g_z(\zeta)\,d\zeta = 0$. On en déduit la formule de Cauchy. □

Le cas où le chemin fermé c est un cercle « orienté dans le sens trigonométrique » est le plus important. C'est le seul qu'on utilisera dans le prochain chapitre :

Notation 3.3.9. — On note $\partial D(a, r)$ le chemin fermé $c(t) = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, et si $f \in C^0(C(a, r))$, on note

$$\int_{\partial D(a,r)} f(z)\,dz$$

l'intégrale de f sur c.

Lemme 3.3.10. — *Pour tout $z \notin C(a,r)$, on a :*

$$\mathrm{Ind}(z, \partial D(a,r)) = \begin{cases} 1 & si\ z \in D(a,r), \\ 0 & si\ z \notin \overline{D}(a,r). \end{cases} \tag{22}$$

Démonstration. — Si $z \in D(a,r)$, on a :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}},$$

avec convergence normale en $\zeta \in C(a,r)$. On peut intégrer terme à terme. Tous les termes ont des primitives en ζ sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ sauf le premier. On en déduit :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = 1.$$

Si $z \notin \overline{D}(a,r)$, on a :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - a) - (z - a)} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\zeta-a)^n}{(z - a)^{n+1}},$$

avec convergence normale en $\zeta \in C(a,r)$. On peut intégrer terme à terme. Tous les termes ont des primitives en ζ sur $\mathbb{C}$. Les intégrales sont nulles. □

Théorème 3.3.11. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, on a :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & si\ z \in D(a,r), \\ 0 & si\ z \notin \overline{D}(a,r). \end{cases} \tag{23}$$

Démonstration. — Si $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, il existe $s > r$ tel que $D(a,s) \subset \Omega$, et $D(a,s)$ est un ouvert convexe. La formule de Cauchy appliquée sur cet ouvert donne la formule pour $z \in D(a,s)$ car on sait calculer l'indice par rapport à un cercle.

Si $z \notin D(a,s)$, la fonction $\zeta \to \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ est holomorphe sur l'ouvert convexe $D(a,s)$. Donc sont intégrale de Cauchy est nulle sur le chemin $\partial D(a,r)$. □

3.4. Les fonctions holomorphes sont analytiques

Répétons d'abord la formule de Cauchy, qui *est la propriété fondamentale* des fonctions holomorphes. Les autres propriétés des fonctions holomorphes étudiées dans ce cours sont des corollaires de cette formule et des propriétés élémentaires des séries entières.

Théorème 3.4.1. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, on a :*

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & si\ z \in D(a,r), \\ 0 & si\ z \notin \overline{D}(a,r). \end{cases} \tag{24}$$

On en déduit que les fonctions holomorphes sont analytiques :

Théorème 3.4.2. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si elle est analytique. De plus, si $a \in \Omega$ et $r(a) = d(a, \partial\Omega)$, f est développable en série entière de $z - a$ sur $D(a, r(a))$ et cette série entière est sa série de Taylor en a.*

Démonstration. — On sait déjà qu'une fonction analytique est holomorphe. On suppose maintenant $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et on se donne $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$.

Soit $z \in D(a, r)$. Pour tout $\zeta \in C(a, r)$, on a $|z - a|/|\zeta - a| = |z - a|/r < 1$ et l'on peut écrire :

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - a}(1 - (z - a)/(\zeta - a))^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - a} \frac{(z - a)^n}{(\zeta - a)^n}.$$

Si $M = \sup_{\zeta \in C(a,r)} |f(\zeta)|$, le terme général de la série précédente est majoré en module par $Mr^{-1}(|z - a|/r)^n$, le terme général d'une série convergente : la série converge normalement sur $C(a, r)$. On peut donc substituer le développement précédent dans l'intégrale de Cauchy (24) et intégrer terme à terme. On obtient :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - a)^n \quad \text{si } z \in D(a, r)\,; \tag{25}$$

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{26}$$

f est donc la somme d'une série entière de $z - a$ sur $D(a, r)$ quel que soit $0 < r < r(a)$. Par théorème, ce développement est indépendant de r : c'est la série de Taylor de f en a. □

On a obtenu un résultat nouveau sur les fonctions analytiques : le rayon de convergence de la série de Taylor d'une fonction $f \in A(\Omega)$ en $a \in \Omega$ est égal à la distance de a au complémentaire de Ω. En particulier :

Corollaire 3.4.3. — *Si f est une fonction analytique sur $D(a, r)$, f est la somme sur ce disque de sa série de Taylor en a. Si f est une fonction entière et $a \in \mathbb{C}$, f est la somme sur $\mathbb{C}$ de sa série de Taylor en a.*

Il n'y a pas d'analogue à ce résultat dans le cadre réel :

Exemple 3.4.4. — La fonction $t \mapsto (1 + t^2)^{-1}$ est analytique sur $\mathbb{R}$, mais l'intervalle ouvert de convergence de sa série de Taylor en 0 est l'intervalle $]-1, +1[$. Le passage au plan complexe explique pourquoi : la fonction $z \mapsto (1 + z^2)^{-1}$ est holomorphe sur l'ouvert $\mathbb{C} \setminus \{-i, +i\}$ et $D(0, 1)$ est le disque maximal centré en 0 contenu dans cet ouvert.

On dira maintenant plutôt fonction holomorphe que fonction analytique, ce qui évite la confusion possible avec les fonctions analytiques au sens réel. Certaines propriétés élémentaires des fonctions holomorphes (par exemple la stabilité par le produit) ont en fait été démontrées deux fois, dans chacun des deux cadres, holomorphe et analytique.

Dans la démonstration ci-dessus, on peut choisir de développer suivant $(z-b)$ pour $b \in D(a, r)$ i.e. pas nécessairement suivant le centre du domaine d'intégration :

Corollaire 3.4.5. — *Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{D(a,r)}$ et $b \in D(a,r)$ alors*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{f^{(n)}(b)}{n!} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - b)^{n+1}}\, d\zeta.$$

Démonstration. — si $|z-b| < r - |b-a|$ alors il y a convergence normal en $\zeta \in C(a,r)$ de $\sum_{n\geq 0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - b}\frac{(z-b)^n}{(\zeta - b)^n}$. Permutant série et intégrale, on obtient

$$\forall z \in D(b, r - |b-a|),\ f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - b)^{n+1}}\right)(z-b)^n.$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient la formule. □

Remarque 3.4.6. —

Soit $f \in C^0(C(a,r))$ alors $D(a,r) \ni z \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$ est somme de la série entière

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}\right)(z-a)^n.$$

L'intégrale à paramètre holomorphe (z) définit donc une fonction holomorphe sur $D(a,r)$.

On a vu que si f est la restriction d'une fonction holomorphe sur un voisinage de $\overline{D(a,r)}$ alors cette intégrale coincide avec f.

CHAPITRE 4

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES FONCTIONS HOLOMORPHES

4.1. Les inégalités de Cauchy

Notation 4.1.1. — Si X est un espace topologique et $u : X \to \mathbb{C}$ une fonction continue, on note :

$$||u||_X = \sup_{x \in X} |u(x)| \in [0, +\infty].$$

Si X est compact, la borne supérieure est atteinte et la norme $||u||_X$ est finie.

Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, on a obtenu la formule (25). Compte tenu de la relation entre les coefficients d'une série entière convergente et les dérivées de sa somme, on a donc :

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta. \tag{27}$$

On déduit les estimations de Cauchy :

***Théorème 4.1.2* (Inégalités de Cauchy).** — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Pour tout $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, et tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$|f^{(n)}(a)| \leq n!\, r^{-n}\, ||f||_{C(a,r)}.$$

Voici une application :

***Théorème 4.1.3* (Liouville).** — *Toute fonction entière bornée est constante.*

Démonstration. — Soit $M = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$. On écrit les inégalités de Cauchy en 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r > 0$:

$$|f^{(n)}(0)| \leq n!\, M\, r^{-n}.$$

En faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient $f^{(n)}(0) = 0$, sauf pour $n = 0$. Comme f est la somme de sa série de Taylor en 0, $f \equiv f(0)$. □

Une autre démonstration. — On écrit seulement les inégalités pour $n = 1$, mais en tout point $a \in \mathbb{C}$. On obtient $|f'(a)| \leq M/r$ puis $f' \equiv 0$...

On retrouve en particulier le Théorème de d'Alembert-Gauss :

Corollaire 4.1.4. — *Un polynôme non constant a une racine.*

Démonstration. — En effet, si $P \in \mathbb{C}[z]$ ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, la fonction $z \mapsto 1/P(z)$ est une fonction entière qui tend vers 0 à l'infini, donc bornée. Elle est constante (Théorème de Liouville) donc aussi P. □

On a la généralisation suivante des inégalités de Cauchy :

Théorème 4.1.5. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Soit K un compact contenu dans Ω et $0 < r < d(K, \partial\Omega)$. Notons $K(r) = \{z \in \mathbb{C}, \ d(z, K) \leq r\}$; c'est un compact contenu dans Ω. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$||f^{(n)}||_K \leq n!\, r^{-n}\, ||f||_{K(r)}.$$

Démonstration. — En effet, si $a \in K$, $\overline{D}(a, r) \subset K(r)$. Il suffit d'écrire les inégalités de Cauchy en a. □

Remarque 4.1.6. — Propriétés de la distance à un ensemble :
1) Si A est une partie non vide d'un espace métrique (X, d), alors la fonction $X \ni x \mapsto d(x, A) = \inf\{d(x, a),\ a \in A\}$ est $1-$lipschitzienne :

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)\,.$$

En effet $\forall z \in A$, $d(x, A) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ donc $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$. On obtient l'inégalité en échangeant x et y.
2) On a $\overline{A} = \{x \in X, \text{ tel que } d(x, A) = 0\}$, donc A est fermé ssi $[d(x, A) = 0 \Rightarrow x \in A]$.
3) Si B est une autre partie non vide de X alors $d(A, B) = d(B, A) := \inf\{d(x, y),\ x \in X,\ y \in Y\} = \inf\limits_{x \in A} d(x, B) = \inf\limits_{y \in B} d(y, A) = d(\overline{A}, \overline{B})$
4) Si par exemple B est compact, comme $x \to d(x, A)$ est continue, il existe $b \in B$ tel que $d(b, A) = d(B, A)$ (l'inf. est un min.).
5) Donc si A est fermé, B compact et $A \cap B = \emptyset$ alors $d(A, B) > 0$.
6) Soit $\epsilon > 0$. Alors $A_\epsilon = \{x \in X, d(x, A) < \epsilon\} = \bigcup\limits_{a \in A} B(a, \epsilon)$ est un ouvert. Si A, B sont deux parties de X telles que $d(A, B) = 2\epsilon > 0$ alors A_ϵ et B_ϵ sont deux ouverts qui séparent A et B $(A_\epsilon \cap B_\epsilon = \emptyset)$.

4.2. Suites de fonctions holomorphes

Définition 4.2.1. — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une suite de fonctions $u_n : \Omega \to \mathbb{C}$ *converge uniformément* vers $u : X \to \mathbb{C}$ *sur tout compact* si, pour tout compact $K \subset \Omega$, $u_{n|K}$ converge uniformément vers $u_{|K}$.

Si les u_n sont continues, ça revient à dire que $||u_n - u||_K \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ pour tout compact $K \subset \Omega$. Le résultat fondamental sur les suites de fonctions holomorphes est le suivant :

***Théorème 4.2.2* (Weierstrass).** — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $u_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ une suite. Si $u_n \to u$ uniformément sur tout compact de Ω, alors $u \in \mathcal{O}(\Omega)$. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n^{(p)} \to u^{(p)}$ uniformément sur tout compact de Ω.*

Ce théorème n'a pas d'« analogue réel », bien au contraire : d'après un autre théorème de Weierstrass, toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ est la limite uniforme sur $[0,1]$ d'une suite de polynômes !

Démonstration. — La fonction $u : \Omega \to \mathbb{C}$ est continue car les u_n le sont et il y a convergence uniforme au voisinage compact de chaque point de Ω.

Si $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall z \in D(a,r)$

$$u_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{u_n(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \, .$$

La suite de fonctions converge uniformément sur le cercle $C(a,r)$, on peut donc passer à la limite sous le signe intégrale : $\forall z \in D(a,r)$

$$u(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta \, .$$

Ce qui entraine, comme on l'a vu, que u est analytique sur $D(a,r)$ donc holomorphe.

On applique maintenant les inégalités de Cauchy généralisées pour montrer la convergence uniforme de $u^{(p)} - u_n^{(p)}$ vers 0 :

Si $K \subset \Omega$ est compact et $r < d(K, \partial\Omega)$, $K(r) = \{z \in \mathbb{C},\ d(z,K) \leq r\}$ est un compact contenu dans Ω et

$$||u_n^{(p)} - u^{(p)}||_K \leq C_p ||u_n - u||_{K(r)} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$$

où $C_p = p!\, r^{-p}$ ne dépend pas de n. □

4.3. Intégrales dépendant holomorphiquement d'un paramètre

Théorème 4.3.1. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, T un ensemble muni (d'une tribu et) d'une mesure positive μ, et $f : \Omega \times T \to \mathbb{C}$ une fonction. On suppose :*

1. *Pour presque tout $t \in T$, $z \mapsto f(z,t)$ est holomorphe sur Ω.*
2. *Pour tout $z \in \Omega$, $t \mapsto f(z,t)$ est mesurable.*
3. *Pour tout $a \in \Omega$, il existe $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$ et une fonction mesurable $k : T \to [0,+\infty]$ telle que :*

$$|f(z,t)| \leq k(t) \ \text{ si } (z,t) \in \overline{D}(a,r) \times T \, ; \qquad \int_T k(t)\, d\mu(t) < +\infty.$$

Alors

$$F(z) = \int_T f(z,t)\, d\mu(t) \tag{28}$$

définit une fonction holomorphe sur Ω et, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $z \in \Omega$:

$$F^{(p)}(z) = \int_T \frac{\partial^p f}{\partial z^p}(z,t)\, d\mu(t). \tag{29}$$

On doit reconnaître dans cet énoncé la condition d'« intégrabilité localement dominée » des théorèmes de Lebesgue. Le point remarquable de l'énoncé est qu'on fait cette hypothèse sur f, mais pas sur ses dérivées $\partial^p f / \partial z^p$. Le point remarquable de la démonstration est qu'elle n'utilise pas le Théorème de Lebesgue.

Démonstration. — On va en fait montrer que F est analytique : Soit N un ensemble négligeable telle que $t \in T \setminus N \Rightarrow f(.,t) \in \mathcal{O}(\Omega)$. On montre par recurrence que les fonctions $t \mapsto f^{(n)}(z,t)$ (prolongées par 0 sur N) sont mesurables en tant que limites simples de fonctions mesurables (par exemple $f'(z,.) = \lim_{m\to+\infty} m\,(f(z+1/m,\cdot) - f(z,\cdot)))$.

Si $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ alors $\forall t \in T \setminus N$, $\forall z \in D(a,r)$, $f(z,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)(z-a)^n$. Les fonctions $a_n(.) = \frac{f^{(n)}(a,.)}{n!}$ sont mesurables et vérifient les inégalités de Cauchy $|a_n(t)r^n| \le k(t)$. De plus $\forall z \in D(a,r)$,

$$|f(z,t) - \sum_{n=0}^{p} a_n(t)(z-a)^n| \le \sum_{n>p} |a_n(t)||z-a|^n \le k(t)\frac{(\frac{|z-a|}{r})^{p+1}}{1-\frac{|z-a|}{r}}\,.$$

Donc $\forall z \in D(a,r)$,

$$|F(t) - \sum_{n=0}^{p}(z-a)^n \int_T a_n(t)d\mu(t)| \le \frac{(\frac{|z-a|}{r})^{p+1}}{1-\frac{|z-a|}{r}} \int_T k(t)d\mu(t) \underset{p\to+\infty}{\to} 0\,.$$

Ceci prouve que la série entière $\sum_{n\ge0}(z-a)^n \int_T a_n(t)d\mu(t)$ converge sur $D(a,r)$ vers F. Cette fonction est donc analytique sur $D(a,r)$ et par unicité du dévelopement en série entière,

$$F^{(p)}(a) = \int_T p!a_p(t)d\mu(t) = \int_T \frac{\partial^p f}{\partial z^p}(a,t)\,d\mu(t)\,.$$

□

Exercice 4.3.2. — Soit $f : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}$, définie par $f(x,0) = 0$ et $f(x,t) = t/(x^2+t)$ si $0 < t \le 1$. Il est clair que f est bornée et que $x \mapsto f(x,t)$ est analytique sur $\mathbb{R}$ quel que soit $t \in [0,1]$. Montrer que $F(x) = \int_0^1 f(x,t)\,dt$ n'est pas analytique au voisinage de 0.

4.4. Le principe du maximum

***Théorème 4.4.1* (Principe du maximum).** — *Soit Ω un ouvert* connexe *de $\mathbb{C}$. Si une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ a un maximum local en $a \in \Omega$, elle est constante.*

Démonstration. — L'hypothèse signifie qu'il existe $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, tel que

$$z \in \overline{D}(a,r) \ \Rightarrow |f(z)| \le |f(a)|.$$

Il suffit de montrer que $f \equiv f(a)$ au voisinage de a ; le principe du prolongement analytique permet alors de conclure. C'est évident si $f(a) = 0$. On suppose donc $f(a) \ne 0$. La démonstration est similaire à celle qu'on a donné au Chapitre 1 du Théorème de d'Alembert-Gauss.

Soit

$$z \in D(a,r), \qquad \frac{f(z)}{f(a)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(z-a)^n,$$

et supposons f non constante. Il existe donc $p \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\frac{f(z)}{f(a)} = 1 + a_p(z-a)^p + |z-a|^p\varepsilon(z-a)$$

et $a_p \neq 0$. Soit $a_p = \rho e^{i\phi}$ (forme trigonométrique) ; on obtient

$$\frac{f(a + te^{-i\phi/p})}{f(a)} = 1 + \rho t^p + t^p\varepsilon(t)$$

pour tout $t \geq 0$ petit, donc $|f(a+te^{-i\phi/p})/f(a)| > 1$ si $0 \leq t$ est assez petit : $|f|$ n'a pas de maximum local en a. □

Pour varier, on a donné une « démonstration analytique » mais on démontre facilement le principe du maximum en utilisant la formule de Cauchy :

Exercice 4.4.2. — Démontrer le théorème précédent en utilisant la formule de la moyenne, voir §4 ci-dessous.

On utilise souvent la forme suivante du principe du maximum :

Corollaire 4.4.3. — *Soit Ω un ouvert* borné *de $\mathbb{C}$ et f une fonction continue $\overline{\Omega} \to \mathbb{C}$, holomorphe sur Ω. On a :*

$$||f||_{\overline{\Omega}} = ||f||_{\partial\Omega}.$$

L'hypothèse que Ω est borné est cruciale, et les erreurs des étudiants qui appliquent le principe du maximum foisonnantes.

Démonstration. — On se ramène au cas d'un ouvert connexe. Comme Ω est borné, $\overline{\Omega}$ est compact, donc $|f|$ est bornée sur $\overline{\Omega}$ et il existe $a \in \overline{\Omega}$ tel que $||f||_{\overline{\Omega}} = |f(a)|$. Si $a \in \partial\Omega$, c'est terminé. Si $a \in \Omega$, f est constante sur Ω d'après le théorème précédent, donc sur $\overline{\Omega}$; c'est encore terminé. □

L'application suivante du principe du maximum est souvent utile :

***Théorème 4.4.4* (Lemme de Schwarz).** — *Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité $D = D(0,1)$, telle que :*

$$|f(z)| \leq 1 \quad \textit{pour tout } z \in D \quad \textit{et} \quad f(0) = 0.$$

Alors :

$$|f(z)| \leq |z| \quad \textit{pour tout } z \in D.$$

De plus, si $|f(z)| = |z|$ pour un *$z \neq 0$, il existe $u \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $f(z) \equiv uz$.*

Démonstration. — La fonction g définie par :

$$g(z) = \frac{f(z)}{z} \quad \text{si } 0 < |z| < 1 \text{ et } g(0) = f'(0)$$

est holomorphe sur D. En effet, si

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$$

sur D, on obtient un développement de g en série entière de z sur D en divisant par z.

Par hypothèse, si $0 < r < 1$, on a $|g(z)| \leq 1/r$ pour tout $z \in C(0,r)$ donc pour tout $z \in D(0,r)$ d'après le principe du maximum.

En faisant tendre r vers 1^-, on obtient $|g(z)| \leq 1$, donc $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D$. C'est la première partie de l'énoncé.

Si $|f(z)| = |z|$ pour un $z \neq 0$, $|g|$ prend la valeur 1 dans D, donc a un maximum local dans D, donc g est constante de module 1, encore d'après le principe du maximum. □

4.5. Propriété de la moyenne

Théorème 4.5.1. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$. La valeur de f au centre a du disque $D(a,r)$ est égale à sa valeur moyenne sur le cercle $C(a,r)$, et aussi sur le disque $\overline{D}(a,r)$.*

Le sens de l'énoncé est précisé par les formules (30) et (31) ci-dessous.

Démonstration. — On obtient la première propriété en écrivant la formule de Cauchy (24) pour $z = a$:

$$f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(z)}{z-a}\, dz.$$

En revenant à la définition, on obtient :

(30)
$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + r\mathrm{e}^{it})\, dt.$$

C'est la première propriété. La valeur moyenne $M(f,r)$ de f sur le disque $D(a,r)$ est définie par :

(31)
$$M(f,r) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{D(a,r)} f(x+iy)\, dx\, dy.$$

On obtient la deuxième propriété en écrivant l'intégrale précédente en coordonnées polaires (de centre a) et en appliquant la première propriété aux cercles $C(a,s)$, $0 < s \leq r$:

$$M(f,r) = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} f(a + s\mathrm{e}^{it}) dt \right) sds = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r 2\pi f(a) sds = f(a).$$

□

4.6. Singularités isolées

Définition 4.6.1. — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Un point isolé du complémentaire de Ω, *i.e.* tel qu'il existe un disque épointé $D(a,r) \setminus \{a\}$ contenu dans Ω, est appelée une *singularité isolée* de f.

On remarque que dans cette situation, $\Omega \cup \{a\}$ est aussi un ouvert de $\mathbb{C}$. Par exemple, si A est l'ensemble des pôles d'une fraction rationnelle R, chacun de ces pôles est une singularité isolée de $R \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus A)$.

Soit $a \in \mathbb{C}$ une singularité isolée de $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. On dit qu'elle est :

1. *éliminable* s'il existe une fonction $\hat{f} \in \mathcal{O}(\Omega \cup \{a\})$ telle que $f(z) = \hat{f}(z)$ pour tout $z \in \Omega$,

2. *polaire* si elle n'est pas éliminable et s'il existe une fonction $\hat{g} \in \mathcal{O}(\Omega \cup \{a\})$ et un entier $p \geq 1$, tels que $f(z) = \hat{g}(z)/(z-a)^p$ pour tout $z \in \Omega$,
3. *essentielle* si elle n'est ni éliminable, ni polaire.

On va montrer que la nature d'une singularité isolée se lit simplement sur le comportement de f. On a d'abord :

***Théorème 4.6.2* (Riemann).** — *Soit a une singularité isolée de $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si f est bornée sur un voisinage épointé de a, la singularité a est éliminable.*

Démonstration. — On suppose d'abord que f a une limite $\ell \in \mathbb{C}$ quand $z \to a$ et on prolonge f en une fonction $\hat{f} : \Omega \cup \{a\} \to \mathbb{C}$ en posant $\hat{f}(a) = \ell$. Il s'agit de montrer que $\hat{f}$ est holomorphe ; le problème se pose seulement au voisinage de a.

La fonction définie par $z \mapsto g(z) := (z-a)\hat{f}(z)$ est holomorphe sur Ω, mais elle est aussi $\mathbb{C}$-dérivable en a :

$$\frac{g(z)-g(a)}{z-a} = f(z) \underset{z \to a}{\longrightarrow} \hat{f}(a).$$

Elle est donc holomorphe sur $\Omega \cup \{a\}$. Au voisinage de a, elle a un développement de la forme :

$$g(z) = (z-a)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n,$$

car $g(a) = 0$. En divisant les deux membres par $z-a$, on obtient que $\hat{f}$ est analytique sur $D(a,r)$, donc sur $\Omega \cup \{a\}$.

Dans le cas général, où f est supposée bornée au voisinage épointé de a, on applique le résultat préliminaire à la fonction $g : \Omega \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = (z-a)f(z)$, qui tend vers 0 quand $z \to a$. On termine comme dans la première partie de la démonstration. □

On a :

Théorème 4.6.3. — *Une singularité isolée a de $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est polaire si et seulement si :*

(32) $$f(z) \underset{z \to a}{\longrightarrow} \infty.$$

Bien entendu, (32) signifie que pour tout $R > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $|f(z)| > R$ si $0 < |z-a| < \varepsilon$.

Démonstration. — On laisse au lecteur le soin de vérifier que si a est une singularité polaire de f, on a (32) ; c'est une conséquence directe de la définition.

Réciproquement, on suppose que f vérifie (32). En particulier, f ne s'annule pas au voisinage épointé de a. Il existe donc $r > 0$ tel que $z \mapsto 1/f(z)$ est définie et holomorphe sur $D(a,r) \setminus \{a\}$ et tend vers 0 quand $z \to a$. D'après le Théorème de Riemann, a est une singularité éliminable de $1/f$. Il existe donc une fonction $u \in \mathcal{O}(D(a,r))$ telle que $u(z) = 1/f(z)$ si $z \neq a$. On a $u(a) = 0$. Comme u ne s'annule pas en dehors de a, on peut écrire $u(z) = (z-a)^p v(z)$ avec $p \geq 1$ et $v \in \mathcal{O}(D(a,r))$ sans zéro. La fonction g sur Ω définie par $g(z) = (z-a)^p f(z)$ si $z \neq a$ et $g(a) = 1/v(a)$ est holomorphe sur Ω et au voisinage de a car elle coïncide avec $1/v$ au voisinage de a. On en déduit que a est une singularité polaire de f. □

En poussant un peu l'argument précédent, on obtient le résultat plus fort suivant :

***Théorème 4.6.4* (Casorati-Weierstrass).** — *Si $a \in \mathbb{C}$ est une singularité isolée essentielle de $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, alors pour tout $r > 0$ tel que $D(a,r) \setminus \{a\}$ soit contenu dans Ω, $f(D(a,r) \setminus \{a\})$ est dense dans $\mathbb{C}$.*

Un théorème beaucoup plus fort (et plus difficile à démontrer) dû à Picard précise que, sous les mêmes hypothèses, $f(D(a,r) \setminus \{a\})$ contient tous les nombres complexes, sauf peut-être un.

Démonstration. — Si $f(D(a,r) \setminus \{a\})$ n'est pas dense dans $\mathbb{C}$, il existe un disque $D(b,s)$ tel que

$$f(D(a,r) \setminus \{a\}) \cap D(b,s) = \emptyset.$$

La fonction

$$u(z) = \frac{1}{f(z) - b}$$

est holomorphe *et bornée* sur $D(a,r) \setminus \{a\}$:

$$|u(z)| = \frac{1}{|f(z) - b|} \leq \frac{1}{s}.$$

D'après le Théorème de Riemann, $u(z)$ a une limite finie ℓ quand $z \to a$ et :

$$f(z) = b + \frac{1}{u(z)}$$

a une limite, finie ou infinie, quand $z \to a$. D'après les résultats précédents, a est une singularité éliminable ou polaire de f. □

***Exemple 4.6.5*.** — Soit f une fonction entière qui n'est pas un polynome. Alors $\forall r > 0$, $f(\{|z| > r\})$ est dense.

On montre la contraposée : Si $f(\{|z| > r_0\})$ est non dense, le théorème de Cassaroti-Weierstrass entraine que la fonction $D(0, \frac{1}{r_0}) \ni z \to f(\frac{1}{z})$ est de la forme $f(\frac{1}{z}) = \frac{g(z)}{z^k}$ pour une fonction g holomorphe sur $D(0, \frac{1}{r_0})$. Donc $\lim_{|z| \to \infty} \frac{f(z)}{z^k} = g(0)$ existe. Il existe r_1 telle que $|z| > r_1$ entraine $|f(z)| \leq |z^k|(|g(0)| + 1)$. Les inégalités de Cauchy entraine que f est un polynome de degré au plus k.

CHAPITRE 5

THÉORIE DE CAUCHY ET HOMOTOPIE

5.1. Homotopie de lacets

Dans ce chapitre, il sera commode de prendre le même segment de définition pour tous les arcs considérés. On donne donc la définition suivante d'un lacet :

Définition 5.1.1. — Soit X un espace topologique. Un *lacet de* ou *dans* X est une fonction continue $c : [0,1] \to X$ telle que $c(0) = c(1)$. On dit que c est un *lacet constant* si c'est une fonction constante.

Définition 5.1.2. — Soit c_0 et c_1 deux lacets de X. Une *homotopie de* c_0 *à* c_1 *dans* X est une application *continue* $C : [0,1] \times [0,1] \to X$, telle que :

1. pour tout $s \in [0,1]$, $\qquad C(s,0) = C(s,1)$,
2. pour tout $t \in [0,1]$, $\qquad C(0,t) = c_0(t) \quad \text{et} \quad C(1,t) = c_1(t)$.

S'il existe une telle application, on dit que c_0 est *homotope à* c_1 *dans* X [1].

Le pléonasme « homotopie dans X... » est volontaire. Dans la suite, X sera souvent une partie d'un espace donné et il sera important d'avoir en tête que l'homotopie a lieu dans X.

Si C est une homotopie de c_0 à c_1 dans X, pour tout $s \in [0,1]$,

$$t \in [0,1], \qquad C_s(t) := C(s,t)$$

est un lacet de X, qui « dépend continûment » du paramètre $s \in [0,1]$, et $C_0 = c_0$, $C_1 = c_1$. On peut interpréter une homotopie de c_0 à c_1 comme une famille de lacets c_s, indexée par $0 \leq s \leq 1$, dépendant continûment de s et qui relie c_0 à c_1.

Lemme 5.1.3. — *L'homotopie dans X est une relation d'équivalence sur l'ensemble des lacets de X.*

Démonstration. — Soit c_1, c_2 et c_3 trois lacets de X.

L'application $C : [0,1] \times [0,1] \to X$ donnée par $C(s,t) = c_1(t)$ est une homotopie de c_1 à c_1 : l'homotopie est une relation réflexive.

---

1. Il y a d'autres notions d'homotopie. Celle qu'on vient de définir, l'homotopie de lacet, est la seule que nous utiliserons.

Si C est une homotopie de c_1 à c_2, l'application $D : [0,1] \times [0,1] \to X$ définie par

$$D(s,t) = C(1-s,t)$$

est une homotopie de c_2 à c_1 : l'homotopie est symétrique.

Si C est une homotopie de c_1 à c_2 et D une homotopie de c_2 à c_3, l'application $E : [0,1] \times [0,1] \to X$ donnée par :

$$E(s,t) = \begin{cases} C(2s,t) & \text{si } 0 \le s \le 1/2, \\ D(2s-1,t) & \text{si } 1/2 < s \le 1 \ , \end{cases}$$

est une homotopie de c_1 à c_3 : l'homotopie est transitive. □

La classe d'équivalence d'un lacet c pour cette relation est *sa classe d'homotopie (dans X)*. Elle est inchangée par « changement de paramétrisation direct ». On a même mieux :

Lemme 5.1.4. — *Soit $c : [0,1] \to X$ un lacet et $\phi : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue telle que $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = 1$. Les lacets c et $c \circ \phi$ sont homotopes dans X.*

Démonstration. — On remarque d'abord que :

$$\forall s,t \in [0,1], \qquad (1-s)t + s\phi(t) \in [0,1].$$

On peut donc définir :

$$s,t \in [0,1], \qquad C(s,t) := c((1-s)t + s\phi(t)).$$

C'est une homotopie de c à $c \circ \phi$ dans X. □

On peut aussi déplacer l'origine d'un lacet sans changer sa classe d'homotopie. Si $c : [0,1] \to X$ est un lacet d'origine $c(0) = c(1) = a \in X$, et si $b = c(h)$, $0 \le h \le 1$, est un point de $\langle c \rangle$,

$$c_h(t) = \begin{cases} c(h+t) & \text{si } 0 \le t \le 1-h \\ c(h+t-1) & \text{si } 1-h \le t \le 1 \end{cases}$$

est un lacet d'origine b, et $C(s,t) = c_{sh}(t)$, $s,t \in [0,1]$, est une homotopie de c à c_h dans X.

Définition 5.1.5. — Un lacet est *homotope à un point dans X* s'il est homotope à un lacet constant dans X. L'espace X est dit *simplement connexe* si X est connexe par arcs et si tout lacet de X est homotope à un point dans X.

Lemme 5.1.6. — *Si l'espace X est connexe par arcs, deux lacets constants de X sont homotopes.*

Démonstration. — Si $c_0(t) \equiv a$, $c_1(t) \equiv b$ et si $\phi : [0,1] \to X$ est un arc de a à b, $C(s,t) := \phi(s)$, $s,t \in [0,1]$, est une homotopie de c_0 à c_1. □

La simple connexité est une propriété topologique, c'est-à-dire invariante par homéomorphisme :

Théorème 5.1.7. — *Si X est un espace topologique simplement connexe et si X' est homéomorphe à X, X' est simplement connexe.*

Démonstration. — Soit $\phi : X \to X'$ un homéomorphisme. Si $c : [0,1] \to X$ est un arc de a à b dans X, $\phi \circ c : [0,1] \to X'$ est un arc de $\phi(a)$ à $\phi(b)$ dans X'. On en déduit que la connexité par arcs est une propriété topologique.

On voit facilement que l'application $c \mapsto \phi \circ c$ induit une bijection de l'ensemble des lacets de X sur l'ensemble des lacets de X'. On vérifie aussi que si C est une homotopie du lacet c_0 au lacet c_1 dans X, $\phi \circ C$ est une homotopie du lacet $\phi \circ c_0$ au lacet $\phi \circ c_1$ dans X'. □

On suppose maintenant que E est un espace vectoriel normé. On note $|| \cdot ||$ la norme de E, et si $c : [0,1] \to E$, on note :

$$||c||_{[0,1]} = \sup_{t \in [0,1]} ||c(t)||.$$

Si Ω est un ouvert non vide de E et K un compact non vide contenu dans Ω, on note :

$$d(K, \partial\Omega) = \inf\{\, ||x - y||,\ x \in K,\ \ y \in E \backslash \Omega \,\}$$

la distance de K au complémentaire de Ω. Rappelons que cette distance est strictement positive (c'est $+\infty$ si $\Omega = E$).

Définition 5.1.8. — Une partie X est *étoilée* par rapport à un de ses points $a \in X$ si pour tout $x \in X$, le segment $[a, x]$ est contenu dans X.

Exemple 5.1.9. — Par exemple un ensemble convexe est étoilé par rappport à chacun de ses points. $\mathbb{C}$ privÃ© d'une demi-droite fermée $S_{a,v} = \{a + \lambda v,\ \lambda \in [0, +\infty[\}$ est étoil{’e par rapport à chaque point de $\{a - \lambda v,\ \lambda \in [0, +\infty[\}$. En effet après transformation affine, il suffit de montrer que $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ est Ã©toilÃ© par rapport à $t \in]-\infty, 0[$: soit $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$. Si $z \in]-\infty, 0[$ alors $[t, z] \subset \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$. Sinon $y \neq 0$ donc la partie imaginaire de $st + (1-s)z$, $s \in [0,1]$, est nulle seulement pour $s = 1$.

Théorème 5.1.10. — *Si $X \subset E$ est étoilé par rapport à un de ses points $a \in X$ alors X est simplement connexe.*

Démonstration. — Il découle de la définition d'une partie étoilée qu'elle est connexe (voir le lemme 1.8.3). Il reste à montrer que tout lacet y est homotope à un point.

On définit $R : [0,1] \times E \to E$ par $R(s, x) = (1-s)x + sa$. Cette application est continue, et pour tout $x \in E$, $R(s, x) \in [a, x]$. Comme X est étoilé par rapport à $a \in X$, la restriction de R à $[0,1] \times X$ est à valeurs dans X. On garde la même notation pour sa restriction $R : [0,1] \times X \to X$.

Alors pour tout $x \in X$, $R(0, x) = x$ et $R(1, x) = a$. Si c est un lacet dans X alors on définit $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ par $H(s,t) = R(s, c(t))$: c'est une homotopie entre c et le chemin constant a (on dit que R définie un rétract par déformation de X sur a). □

Lemme 5.1.11. — *Soit Ω un ouvert de E, c_0 et c_1 deux lacets de Ω. Si :*

$$\forall t \in [0,1], \qquad ||c_1(t) - c_0(t)|| < d(c_0(t), \partial\Omega),$$

l'homotopie standard *de c_0 à c_1 définie par*

$$s, t \in [0,1], \qquad C(s,t) := (1-s)c_0(t) + sc_1(t), \tag{33}$$

prend ses valeurs dans Ω. C'est en particulier le cas si :

$$||c_1 - c_0||_{[0,1]} < d(\langle c_0 \rangle, \partial\Omega).$$

Démonstration. — En effet, si $C(s,t) = (1-s)c_0(t) + sc_1(t)$,

$$||C(s,t) - c_0(t)|| = s||c_1(t) - c_0(t)|| \leq ||c_1(t) - c_0(t)|| < d(c_0(t), \partial\Omega),$$

donc $C(s,t) \in \Omega$. □

5.2. Les théorèmes de Cauchy : versions homotopiques

***Théorème 5.2.1* (Cauchy).** — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si c_0 et c_1 sont deux lacets de classe $C^1_{\rm pm}$ homotopes dans Ω, on a :*

$$\int_{c_0} f(z)\,dz = \int_{c_1} f(z)\,dz.$$

Démonstration. — Soit C une homotopie de c_0 à c_1 dans Ω et $K := C([0,1]\times[0,1])$ son image. C'est un compact contenu dans Ω. Soit $d := \mathrm{d}\,(K, \partial\Omega) > 0$ la distance de K au bord de Ω.

Par continuité uniforme de C, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ telle que

$$max(|s-s'|, |t-t'|) < \frac{1}{n} \Rightarrow ||C(s,t) - C(s',t')|| < \frac{d}{2} = \alpha.$$

Pour $0 \leq k \leq n$, notons D_k le lacet polygonal $[C(\frac{k}{n}, 0),\ C(\frac{k}{n}, \frac{1}{n}), \ldots,\ C(\frac{k}{n}, \frac{n-1}{n}),\ C(\frac{k}{n}, 1)]$ paramétré par $[0,1]$ comme ci dessus. De sorte que

$$||D_k - C(\frac{k}{n}, .)||_{[0,1]} < 2\alpha = d\,.$$

Notons $D_{-1} = c_0$ et $D_{n+1} = c_1$.

Pour $-1 \leq i \leq n$ et $0 \leq k \leq n$, le chemin fermé

$$H_{i,k} = D_{i|[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]} \text{ v } [D_i(\frac{k+1}{n}), D_{i+1}(\frac{k+1}{n})] \text{ v } opp\left([D_i(\frac{k}{n}), D_{i+1}(\frac{k}{n})] \text{ v } D_{i+1|[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}\right)$$

est telle que

$$dist(D_i(\frac{k}{n}), < H_{i,k} >) = \max\{||D_i(\frac{k}{n}) - y||,\ y \in < H_{i,k} >\} < 2\alpha$$

Or $f \in \mathcal{O}(D(D_i(\frac{k}{n}), 2\alpha))$ et le disque est convexe. Donc $\int_{H_{i,k}} f(z)dz = 0$. C'est à dire (omettons $f(z)dz$ dans les intégrales ci dessous) :

$$\int_{D_{i|[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}} - \int_{D_{i+1|[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}} = \int_{[D_i(\frac{k}{n}), D_{i+1}(\frac{k}{n})]} - \int_{[D_i(\frac{k+1}{n}), D_{i+1}(\frac{k+1}{n})]}.$$

Donc

$$\int_{c_0} - \int_{c_1} = \sum_{i=-1}^{n} \int_{D_i} - \int_{D_{i+1}} = \sum_{i=-1}^{n}\sum_{k=0}^{n} \int_{D_{i|[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}} - \int_{D_{i+1|[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}}$$

$$= \sum_{i=-1}^{n}\sum_{k=0}^{n} \int_{[D_i(\frac{k}{n}), D_{i+1}(\frac{k}{n})]} - \int_{[D_i(\frac{k+1}{n}), D_{i+1}(\frac{k+1}{n})]}$$

$$= \sum_{i=-1}^{n} \int_{[D_i(0),D_{i+1}(0)]} - \int_{[D_i(1),D_{i+1}(1)]} = 0$$

□

On peut étendre la formule de Cauchy aux lacets homotopes à un point dans le domaine de définition de la fonction qu'on intègre.

***Théorème 5.2.2* (Formule de Cauchy).** — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit c un chemin fermé de Ω homotope à un point dans Ω. C'est le cas pour tout chemin fermé de Ω si Ω est simplement connexe. Alors*

$$\forall z \notin \langle c\rangle, \qquad \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \mathrm{Ind}(c,z) f(z).$$

Démonstration. —
i) Le point $z \notin \langle c\rangle$ étant fixé, on définit la fonction $g_z : \Omega \to \mathbb{C}$

$$g_z(\zeta) = \begin{cases} (f(\zeta) - f(z))/(\zeta - z) & \text{si } \zeta \neq z, \\ f'(z) & \text{si } z \in \Omega \text{ et } \zeta = z. \end{cases}$$

La fonction g_z es holomorphe sur Ω : c'est clair sur $\Omega \setminus \{z\}$. Mais comme f est analytique au voisinage de z, on a $f(\zeta) - f(z) = (\zeta - z)\sum_{n\geq 1} \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(\zeta - z)^{n-1} = (\zeta - z) g(\zeta)$ avec g holomorphe au voisinage $D(z,\epsilon)$ de z telle que $g(z) = f'(z)$. Donc $g_{z|D(z,\epsilon)} = g$ est holomorphe au voisinage de z.

D'après la deuxième partie du Théorème de Cauchy, $\int_c g_z(\zeta)\, d\zeta = 0$. On en déduit la formule de Cauchy. □

On a vu que l'indice $\mathrm{Ind}(c,z)$ est nul lorsque z est dans la composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus \langle c\rangle$. Le théorème de Cauchy homotopique nous donne un résultat un peu plus général :

Corollaire 5.2.3. — *Soit $a \in \mathbb{C}$, et soient c_1 et c_2 deux chemins homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Alors* $\mathrm{Ind}(c_1, a) = \mathrm{Ind}(c_2, a)$.

Le théorème de Cauchy homotopique entraine :

Corollaire 5.2.4. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si c est un lacet de classe C^1_{pm} de Ω, homotope à un point dans Ω, alors :*

$$\int_c f(z)\, dz = 0.$$

Par définition d'un ouvert simplement connexe, on a donc :

Théorème 5.2.5. — *Si Ω est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$,*

$$\int_c f(z)\, dz = 0,$$

pour tout $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et tout chemin fermé c de Ω. Toute $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ a une primitive sur Ω.

On en déduit :

Théorème 5.2.6. — *Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si f ne s'annule pas sur Ω, il existe une fonction $\phi \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que $f(z) = \mathrm{e}^{\phi(z)}$ pour tout $z \in \Omega$. En particulier, si $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ est un ouvert simplement connexe, il existe une détermination holomorphe de* $\log z$ *sur Ω.*

Démonstration. — Si f ne s'annule pas sur Ω, la fonction $z \mapsto f'(z)/f(z)$ est holomorphe donc admet une primitive $\phi \in \mathcal{O}(\Omega)$. Étant donné $a \in \Omega$ et quitte à ajouter une constante à la fonction ϕ, on peut supposer que $\phi(a)$ est un logarithme de a. *i.e.* que $\mathrm{e}^{\phi(a)} = f(a)$. Posons :

$$u(z) = f(z)^{-1}\mathrm{e}^{\phi(z)}.$$

C'est une fonction holomorphe et on calcule :

$$u'(z) = -u(z)f'(z)f(z)^{-2} + \phi'(z)f(z)^{-1}u(z) = 0.$$

Comme Ω est connexe, la fonction u est constante, égale à $u(a) = 1$. On obtient $\mathrm{e}^{\phi(z)} = f(z)$ pour tout $z \in \Omega$. □

5.3. L'indice d'un point par rapport à un lacet

On a défini au Chapitre 4 l'indice d'un point $a \in \mathbb{C}$ par rapport à un chemin fermé c tel que $a \notin \langle c \rangle$:

$$\operatorname{Ind}(a, c) = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{dz}{z-a} .$$

Cet indice intervient, comme on l'a vu, dans la formule de Cauchy. Pour l'instant, on ne l'a calculé que dans le cas où c est « un cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique ». Un peu plus généralement, l'indice de

$$t \in [0,1], \qquad c_n(t) = \mathrm{e}^{i2n\pi t},$$

par rapport à 0 vaut

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{c_n'(t)}{c_n(t)}\,dt = n.$$

C'est le nombre de tours, comptés algébriquement, que c_n fait autour de 0. On va voir que cette interprétation est valable en général.

Définition 5.3.1. — Soit $c : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ un arc. On appelle *détermination continue de l'argument le long de c* toute fonction continue $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$, telle que $\theta(t)$ soit un argument de $c(t)$ pour tout $t \in [0,1]$, *i.e.* telle que $c(t) = |c(t)|\mathrm{e}^{i\theta(t)}$ pour tout $t \in [0,1]$.

Il ne faut pas confondre cette notion avec celle, déjà introduite, de détermination continue de l'argument sur une partie de $\mathbb{C}^*$: il n'existe pas de détermination continue de l'argument sur S, mais $\theta(t) = 2\pi t$ est évidemment une détermination continue de l'argument le long du lacet $c : [0,1] \to S$ défini par $c(t) = \mathrm{e}^{i2\pi t}$, d'image S !

Le résultat suivant est important :

Théorème 5.3.2. — *Pour tout arc $c : [0,1] \to \mathbb{C}^*$, il existe une détermination continue de l'argument le long de c. Elle est unique à l'addition près d'une constante $\in 2\pi\mathbb{Z}$.*

Démonstration. — On montre d'abord l'unicité modulo $2\pi\mathbb{Z}$. Si $\theta, \theta_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont deux déterminations continues de l'argument le long de l'arc c, $\theta_1 - \theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue à valeurs dans $2\pi\mathbb{Z}$: elle est constante.

On montre maintenant l'existence. Soit $d := \inf_{0 \leq t \leq 1} |c(t)|$. On a $d > 0$. Par continuité uniforme de $c : [0,1] \to \mathbb{C}^*$, il existe une subdivision $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$ telle que :

$$c([t_k, t_{k+1}]) \subset D_k := D(c(t_k), d)$$

pour $k = 0, \ldots, t_{N-1}$. Comme D_k est un disque contenu dans $\mathbb{C}^*$, on sait qu'il existe une détermination continue

$$\Theta_k : D_k \to \mathbb{R}$$

de l'argument sur D_k. On définit la fonction $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ en posant $\theta(0) = \Theta_0(c(0))$ et, si $k = 0, \ldots, N-1$:

$$\text{si } \ t_k < t \leq t_{k+1}, \qquad \theta(t) = \Theta_k(c(t)) + 2\pi n_k,$$

où $n_0 = 0$ et $n_1, \ldots n_{N-1}$ sont des entiers que l'on choisit de façon que la fonction θ soit continue. Par exemple, n_1 est déterminée par :

$$\Theta_0(c(t_1)) = \Theta_1(c(t_1)) + 2\pi n_1.$$

C'est possible puisque $\Theta_0(c(t_1))$ et $\Theta_1(c(t_1))$ sont des arguments du même nombre $c(t_1)$. On détermine ainsi les entiers n_k par récurrence. □

Remarque 5.3.3. — Notons que θ est de classe C^1_{pm} si c l'est : Si c est C^1 au voisinage de $t \in]0,1[$ fixé, choisissons une détèrmination analytique du logarithme L sur $D(c(t), |c(t)|)$. Soit $\epsilon > 0$ tel que $c(]t-\epsilon, t+\epsilon[) \subset D(c(t), |c(t)|)$. Alors $ImL \circ c$ est une détèrmination continue de l'argument de c sur $]t-\epsilon, t+\epsilon[$ qui est de classe C^1. Comme il existe $k \in \mathbb{Z}$ telle que $\theta - ImL \circ c = 2ik\pi$ sur $]t-\epsilon, t+\epsilon[$, l'assertion est montrée.

On peut maintenant donner une autre interprétation de l'indice d'un point par rapport à un chemin fermé et donner plusieurs propriétés importantes de l'indice. Par translation, il suffit de comprendre le cas où le point est 0 :

Théorème 5.3.4. — *Soit $c : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ un chemin fermé, et $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ une détermination continue de l'argument le long de c. On a :*

$$\operatorname{Ind}(0, c) = \frac{1}{2\pi}(\theta(1) - \theta(0)). \tag{34}$$

Autrement dit, l'indice est égal à la « variation de l'argument le long de c » divisée par 2π. En particulier, c'est un entier relatif.

Démonstration. — Comme c ne prend pas la valeur 0, la fonction $\rho(t) = |c(t)|$ est de classe C^1_{pm}. On a :

$$c(t) = \rho(t)\mathrm{e}^{i\theta(t)}, \qquad c'(t) = \rho'(t)\mathrm{e}^{i\theta(t)} + \rho(t)i\theta'(t)\mathrm{e}^{i\theta(t)},$$

donc :

$$\frac{c'(t)}{c(t)} = \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} + i\theta'(t).$$

Comte tenu de la définition de l'indice, on obtient :

$$\mathrm{Ind}\,(0,c) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^1 \frac{c'(t)}{c(t)}\,dt = \frac{1}{2i\pi}[\mathrm{Log}\,|\rho(t)| + i\theta(t)]_0^1$$

et le résultat. □

Le résultat précédent permet aussi de définir l'indice d'un lacet, sans supposer qu'il soit de classe C^1_{pm}.

Définition 5.3.5. — Soit $a \in \mathbb{C}$ et c un lacet de $\mathbb{C}\setminus\{a\}$. On définit et on note *l'indice de a par rapport à c* :

$$\mathrm{Ind}\,(a,c) = \frac{1}{2\pi}(\theta(1) - \theta(0)),$$

où θ est une détermination de l'argument de $z - a$ le long de c ; ça ne dépend pas du choix de θ. C'est un entier rationnel.

Le Théorème de Cauchy donne facilement le résultat suivant dans le cas des lacets de classe C^1_{pm}. C'est un exercice conseillé.

Théorème 5.3.6. — *On a :*

1. *Soit $a \in \mathbb{C}$. Deux lacets homotopes dans $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ ont le même indice par rapport à a.*
2. *Soit c un lacet de $\mathbb{C}$. La fonction*

$$\mathbb{C}\setminus\langle c\rangle \ni z \mapsto \mathrm{Ind}\,(z,c) \in \mathbb{Z}$$

est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C}\setminus\langle c\rangle$. Elle est nulle sur sa composante non bornée.

Démonstration. — Pour démontrer la première propriété, il suffit de montrer que deux lacets c_0 et c_1 de $\mathbb{C}^*$ ont le même indice par rapport à 0 si $||c_1 - c_0||_{[0,1]}$ est assez petit. C'est une conséquence du lemme suivant

Lemme 5.3.7. — *Si deux lacets c_0, $c_1 : I \to \mathbb{C}^*$ vérifient :*

$$\forall t \in [0,1], \qquad |c_1(t) - c_0(t)| < |c_0(t)|,$$

ils ont le même indice par rapport à 0.

Démonstration. — Soit c_0 et c_1 comme dans l'énoncé, et θ une détermination continue de l'argument le long de c_0. Soit $\mathrm{Arg} : \mathbb{C}\setminus]-\infty,0] \to \mathbb{R}$ la détermination principale de l'argument. On a :

$$|\frac{c_1(t)}{c_0(t)} - 1| < 1.$$

Il en résulte que $K(t) := \mathrm{Arg}\,(c_1(t)/c_0(t))$ est bien défini et que

$$t \;\mapsto\; \theta(t) + K(t)$$

est une détermination continue de l'argument le long de c_1. On a $K(0) = K(1)$ et le résultat. □

Pour la deuxième partie de l'énoncé, on note que si $a \notin \langle c \rangle$ et $|h| < d(a, \langle c \rangle)$, les lacets c et $c - h$ sont homotopes dans $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Donc, si $|z - a| < d(a, \langle c \rangle)$, on a :

$$\operatorname{Ind}(z, c) = \operatorname{Ind}(a, c - (z - a)) = \operatorname{Ind}(a, c).$$

La fonction $z \mapsto \operatorname{Ind}(z, c)$ est donc localement constante sur $\mathbb{C} \setminus \langle c \rangle$. Enfin, si $\langle c \rangle \subset \overline{D}(0, r)$, c est homotope à un point dans ce disque (convexe donc simplement connexe), donc aussi dans $\mathbb{C} \setminus \{z\}$, si $|z| > r$. □

Corollaire 5.3.8. — *Le plan épointé $\mathbb{C}^*$ et le cercle unité ne sont pas simplement connexes.*

Démonstration. — L'indice du lacet $c(t) = \mathrm{e}^{i2\pi t}$, $0 \leq t \leq 1$, par rapport à 0 est 1. Ce lacet n'est donc pas homotope à un point dans $\mathbb{C}^*$ ni *a fortiori* dans le cercle unité. □

Pour terminer, on détermine les classes d'homotopie dans $\mathbb{C}^*$ et dans le cercle unité S :

Théorème 5.3.9. — *Deux lacets de $\mathbb{C}^*$ (respectivement de S) sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$ (respectivement dans S) si et seulement s'ils ont le même indice par rapport à 0.*

Corollaire 5.3.10. — *Tout lacet de $\mathbb{C}^*$ (respectivement de S) est homotope dans $\mathbb{C}^*$ (respectivement dans S) à un et un seul des lacets $c_n(t) = \mathrm{e}^{in\,2\pi t}$, $n \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. — Comme on a calculé $\operatorname{Ind}(0, c_n) = n$, il suffit de montrer qu'un lacet c d'indice n par rapport à 0 est homotope au lacet c_n. On utilisera plusieurs fois le fait que l'homotopie de lacets est une relation d'équivalence.

Si c est un lacet de $\mathbb{C}^*$,

$$t \in [0, 1], \qquad c^*(t) = \frac{c(t)}{|c(t)|}$$

est un lacet de S et l'homotopie standard de c à c^* prend ses valeurs dans $\mathbb{C}^*$. En effet :

$$|(1 - s)c(t) + sc^*(t)| = (1 - s)|c(t)| + s > 0.$$

Donc tout lacet de $\mathbb{C}^*$ est homotope dans $\mathbb{C}^*$ à un lacet de S. Il suffit de démontrer le théorème dans le cas de S.

Soit c un lacet de S, $c(0) = \mathrm{e}^{it_0} \in S$. L'homotopie $C(s, t) = \mathrm{e}^{-ist_0}c(t)$, $s, t \in [0, 1]$, est une homotopie de c à $\mathrm{e}^{-it_0}c$ dans S. On peut donc supposer $c(0) = 1$.

Soit n l'indice de 0 par rapport à c et θ une détermination continue de l'argument le long de c, telle que $\theta(0) = 0$. Par hypothèse, on a :

$$\theta(0) = 0, \qquad \theta(1) = 2n\pi.$$

Soit :

$$s, t \in [0, 1], \qquad C(s, t) = \mathrm{e}^{i((1-s)\theta(t) + s2n\pi t)}.$$

On a $C(0, t) \equiv c(t)$ et $C(1, t) = c_n(t)$. C'est une homotopie (de lacets). En effet, pour tout $s \in [0, 1]$, on a :

$$C(s, 0) = \mathrm{e}^{i((1-s)\theta(0)} = 1, \qquad C(s, 1) = \mathrm{e}^{i((1-s)\theta(1) + s2n\pi))} = 1.$$

□

Exercice 5.3.11. — Montrer que si $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ et la sphère S^n définie par :

$$S^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1 \}$$

sont simplement connexes.

CHAPITRE 6

LA FORMULE DES RÉSIDUS

6.1. Séries et développements de Laurent

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $0 \leq r < R \leq +\infty$. On note respectivement :

$$A(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C}\,,\ r < |z - a| < R\,\},$$
$$\overline{A}(a, r, R) = \{z \in \mathbb{C}\,,\ r \leq |z - a| \leq R\,\},$$

l'anneau ouvert et *l'anneau fermé* de centre a et de rayons r et R. Quand on utilisera ces notations, il sera toujours sous-entendu que $0 \leq r < R$.

On appelle *série de Laurent en $a \in \mathbb{C}$, ou de $z - a$*, une « série » de la forme :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n, \tag{35}$$

où $a_n \in \mathbb{C}$. La série converge pour $z \in \mathbb{C}$ fixé si chacune des deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z-a)^{-n}$ converge au sens usuel. En fait, on ne s'intéressera qu'à la convergence absolue de la série.

Exemple 6.1.1. — La série de Laurent $\sum_{n \in \mathbf{Z}} z^n/(1+n^2)$ converge si et seulement si $|z| = 1$.

Définition 6.1.2. — Le *domaine ouvert de convergence* d'une série de Laurent est l'intérieur de son domaine de convergence. S'il n'est pas vide, la série de Laurent est dite convergente.

Une série entière est un cas particulier de série de Laurent. En général, l'étude d'une série de Laurent se ramène à celle de deux séries entières.

Théorème 6.1.3. — *Le domaine ouvert de convergence d'une série de Laurent de $(z - a)$* convergente *est un disque ouvert $D(a, R)$ si c'est une série entière, un anneau ouvert $A(a, r, R)$ sinon. Dans le second cas, la série est normalement convergente sur tout anneau fermé $\overline{A}(a, s, S) \subset A(a, r, R)$.*

Démonstration. — On peut supposer que la série est donnée par (35) et que ce n'est pas une série entière. Soit D et D' les domaines de convergences et R et R' les rayons de convergence des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^n$. On sait que :

$$D(0,R) \subset D \subset \overline{D}(0,R), \qquad D(0,R') \subset D' \subset \overline{D}(0,R').$$

Posons $r = 1/R'$. On en déduit que le domaine Δ de convergence de la série (35) vérifie

$$D(a,R)\backslash\overline{D}(a,r) \subset \Delta \subset \overline{D}(a,R)\backslash D(a,r).$$

Si $R < r$, c'est l'ensemble vide ; si $R = r$, Δ est contenu dans le cercle de centre a et de rayon r, donc est d'intérieur vide. Enfin, si $r < R$, la série est convergente et

$$A(a,r,R) \subset \Delta \subset \overline{A}(a,r,R).$$

C'est la première partie de l'énoncé.

Si $r < s < S < R$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0,S)$ et la série $\sum_{1}^{+\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$ converge normalement sur le complémentaire de $D(0,s)$. D'où la deuxième partie de l'énoncé. □

Lemme 6.1.4. — *Les coefficients d'une série de Laurent convergente sur $A(a,r,R)$ sont déterminés par sa somme f qui définie une fonction holomorphe sur $A(a,r,R)$:*

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,s)} f(z)(z-a)^{-(n+1)}\, dz. \tag{36}$$

Démonstration. — Supposons que la série (35) converge sur l'anneau ouvert $A(a,r,R)$. Notons f sa somme. La fonction $f_1 : z \to \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est définie holomorphe sur $D(0,R)$, la fonction $f_2 : u \to \sum_{n\geq 1} a_{-n} u^n$ est définie et holomorphe sur $D(0,r^{-1})$ donc $z \to f(z) = f_1(z) + f_2(\frac{1}{z})$ est holomorphe sur $A(a,r,R)$. Soit $r < s < R$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on calcule :

$$\int_{\partial D(a,s)} f(z)(z-a)^n\, dz.$$

Comme la convergence de (35) est normale sur le cercle $\partial D(a,s)$, on peut intégrer terme à terme :

$$\int_{\partial D(a,s)} f(z)(z-a)^n\, dz = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_{\partial D(a,s)} (z-a)^{k+n}\, dz.$$

La fonction $z \mapsto (z-a)^{k+n}$ a une primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, sauf si $k+n = -1$. La somme ci-dessus se réduit donc au terme d'indice $k = -n-1$ et l'on obtient :

$$a_{-n-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,s)} f(z)(z-a)^n\, dz. \tag{37}$$

D'où le lemme. □

On étudie maintenant la réciproque.

Notation 6.1.5. — Soit $f \in \mathcal{O}(A(a,r,R))$. Étant donnés $r < s < S < R$, on note :

$$\int_{\partial A(a,s,S)} f(z)\,dz := \int_{\partial D(a,S)} f(z)\,dz - \int_{\partial D(a,s)} f(z)\,dz.$$

C'est *l'intégrale de f sur le bord orienté de l'anneau $A(a,s,S)$*.

***Théorème 6.1.6* (Formule de Cauchy sur un anneau)**. — *Soit $f \in \mathcal{O}(A(a,r,R))$ et $\overline{A}(a,s,S) \subset A(a,r,R)$. On a :*

$$\forall z \in A(a,s,S), \qquad f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial A(a,s,S)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Démonstration. — Soit $z \in A(a,s,S)$; z étant fixé, on pose :

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, \qquad g(z) = f'(z).$$

C'est une fonction holomorphe sur $A(a,r,R)$. Les lacets $\partial D(a,s)$ et $\partial D(a,S)$ sont donnés respectivement par :

$$0 \le t \le 1, \qquad c_0(t) = a + s\mathrm{e}^{i2\pi t}, \qquad c_1(t) = a + S\mathrm{e}^{i2\pi t}.$$

Ils sont homotopes dans $A(a,r,R)$:

$$u,t \in [0,1], \qquad C(u,t) = a + ((1-u)s + uS)\mathrm{e}^{i2\pi t}$$

est une homotopie de c_0 à c_1 dans $A(a,r,R)$. D'après le Théorème de Cauchy :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial A(a,s,S)} g(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{\partial A(a,s,S)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta &= \frac{f(z)}{2i\pi}\int_{\partial A(a,s,S)} \frac{d\zeta}{\zeta - z}\\ &= f(z)(\mathrm{Ind}\,(z,\partial D(a,S)) - \mathrm{Ind}\,(z,\partial D(a,s))).\end{aligned}$$

Comme $z \in A(a,s,S)$, l'indice de z par rapport au lacet $\partial D(a,s)$ est nul et son indice par rapport au lacet $\partial D(a,S)$ vaut 1. D'où le théorème. □

De même que la formule de Cauchy sur un disque donne l'existence du développement en série entière d'une fonction holomorphe, la formule de Cauchy sur un anneau donne l'existence du développement d'une fonction holomorphe sur un anneau en série de Laurent.

Théorème 6.1.7. — *Toute fonction holomorphe f sur l'anneau ouvert $A(a,r,R)$ est la somme d'une (unique) série de Laurent $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n(z-a)^n$ sur cet anneau. De plus, $\forall s \in]r,R[$, $a_n = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\partial D(a,s)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$.*

On dit que c'est *la série de Laurent de f sur l'anneau $A(a,r,R)$*.

Démonstration. — L'unicité a déjà été démontrée, voir Lemme 6.1.4. Si $r < s < S < R$ et $z \in A(a, s, S)$, on écrit :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,S)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,s)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Dans la première intégrale, on utilise le développement normalement convergent

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}},$$

et dans la seconde, le développement normalement convergent

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\zeta - a)^n}{(z-a)^{n+1}}.$$

En intégrant terme à terme, on obtient que la restriction de f à l'anneau $A(a, s, S)$ est la somme d'une série de Laurent. Compte tenu de l'unicité, la série de Laurent qu'on obtient est indépendante de s et S tant que $r < s < S < R$. D'où le théorème. □

On déduit les inégalités de Cauchy :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall s \in]r, R[, \ |a_n| s^n \leq ||f||_{\infty, \partial D(a,s)} .$$

Corollaire 6.1.8. — *Toute fonction $f \in \mathcal{O}(A(a, r, R))$ peut s'écrire*

$$z \in A(a, r, R), \qquad f(z) = g(z) + h(z),$$

où g est holomorphe sur $D(a, R)$ et h holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(a, r)$.

Démonstration. — Si $f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n (z-a)^n$, il suffit de prendre

$$g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n, \qquad h(z) = \sum_{n < 0} a_n (z-a)^n.$$

□

Remarque 6.1.9. — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $A(a, r, R)$, $A(a, r', R') \subset \Omega$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. La fonction f est la somme d'une série de Laurent en $(z-a)$ sur $A(a, r, R)$ et aussi sur $A(a, r', R')$. D'après le théorème précédent, si ces anneaux ont une intersection non vide, ces deux séries coïncident. *C'est faux en général si l'intersection des anneaux est vide, même si Ω est connexe.* On pourra, pour s'en convaincre, développer $f(z) = 1/z + 1/(z-1)$ en série de Laurent sur $A(0, 0, 1)$ et sur $A(0, 1, +\infty)$.

6.2. Développement de Laurent en une singularité isolée

Soit $a \in \mathbb{C}$ une singularité isolée d'une fonction holomorphe f : f est holomorphe sur un disque épointé $D(a, r) \setminus \{a\} = A(a, 0, r)$. Les résultats de la section précédente s'appliquent.

On dira que le développement de Laurent de f en puissance de $(z-a)$ sur $D(a, r) \setminus \{a\}$ est son développement de Laurent en a.

Proposition 6.2.1. — *Soit* $f \in \mathcal{O}(D(a,r)\setminus\{a\})$ *et*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$$

le développement de Laurent de f *en* a*. La singularité* a *est éliminable si et seulement si* $a_n = 0$ *pour tout* $n < 0$*. Elle est polaire si et seulement s'il existe* $p > 0$ *tel que* $a_{-p} \neq 0$ *et* $a_{-n} = 0$ *pour tout* $n > p$*.*

Démonstration. — Compte tenu de l'unicité du développement de Laurent, la série de Laurent d'une fonction holomorphe sur $D(a,r)$ est une série entière. C'est la première propriété.

Si la singularité a est polaire ou éliminable, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que a soit une singularité éliminable de $z \mapsto g(z) = (z-a)^p f(z)$. La série de Laurent de f en a est obtenue en multipliant la série de Taylor de $\tilde{g}$ (le prolongement holomorphe de g sur $D(a,r)$) par $(z-a)^{-p}$. □

Définition 6.2.2. — Soit a une singularité isolée de $f \in \mathcal{O}(D(a,r)\setminus\{a\}$.

1) La série $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n$ converge sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$. Sa somme est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ appelée partie principale de f en a.
2) Le coefficient a_{-1} de $(z-a)^{-1}$ dans le développement de Laurent de f en a est *le résidu de* f *en* a. On le note $\text{Rés}(f,a)$. Pour tout $0 < s < r$, on a :

$$\text{Rés}\,(f,a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,s)} f(z)\,dz\,. \tag{38}$$

La formule ci-dessus a été démontrée plus haut, voir (36). L'importance du résidu vient du lemme suivant :

Lemme 6.2.3. — *Une fonction holomorphe sur* $D(a,r)\setminus\{a\}$ *a une primitive sur* $D(a,r)\setminus\{a\}$ *si et seulement si son résidu en* a *est nul.*

Démonstration. — Si f a une primitive sur $D(a,r)\setminus\{a\}$, son intégrale sur tout chemin fermé de $D(a,r)\setminus\{a\}$ est nulle. En particulier, si $0 < s < r$,

$$2i\pi\text{Rés}\,(f,a) = \int_{\partial D(a,s)} f(z)\,dz = 0.$$

Réciproquement, si le résidu de f en a est nul, f est de la forme $f(z) = \displaystyle\sum_{n\neq -1} a_n(z-a)^n$; f est alors la dérivée sur $D(a,r)\setminus\{a\}$ de la somme de la série de Laurent

$$\sum_{n\neq -1} a_n(z-a)^{n+1}/(n+1).$$

□

6.3. La formule des résidus

***Théorème 6.3.1* (Formule des résidus).** — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, A une partie finie de Ω et $f \in \mathcal{O}(\Omega \backslash A)$. Si c un chemin fermé homotope à un point dans Ω et $\langle c \rangle \subset \Omega \backslash A$, on a :*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_c f(z)\,dz = \sum_{a\in A} \text{Rés}\,(f,a) \times \text{Ind}\,(a,c).$$

C'est en particulier le cas pour tout chemin fermé de $\Omega \backslash A$ si Ω est simplement connexe.

Démonstration. — Soit $A = \{a_1, \dots, a_N\}$. Pour chaque $k \in \{1, \dots, N\}$,

Soit f_k la partie principale de f en a_k :

$$f_k(z) = \sum_{n<0} u_{k,n}(z-a_k)^n$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{a_k\}$. Posons :

$$z \in \Omega\backslash A, \qquad g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{N} f_k(z).$$

C'est une fonction holomorphe telle que chaque singularité a_k est éliminable. Notons $\tilde{g}$ son prolongement holomorphe à Ω. D'après le théorème de Cauchy :

$$\int_c \tilde{g}(z)dz = 0.$$

D'autre part, pour $k = 1, \dots, N$, on peut écrire :

$$z \in \mathbb{C}\backslash\{a_k\}, \qquad f_k(z) = \frac{r_k}{z-a_k} + h_k(z),$$

où r_k est le résidu de f en a_k et où h_k (la somme des termes de degrés < -1 dans le développement de Laurent de f en a_k) possède une primitive sur $\mathbb{C}\backslash\{a_k\}$. On a donc

$$1 \le k \le N, \qquad \int_c h_k(z)dz = 0$$

et

$$\frac{1}{2i\pi}\int_c f_k(z)dz = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{r_k\,dz}{z-a_k} = \text{Rés}\,(f,a_k) \times \text{Ind}\,(a_k,c).$$

On en déduit le théorème. □

Remarque 6.3.2. — On a un un énoncé analogue sans hypothèse que A est fini, il suffit de supposé A fermé discret dans Ω.

6.4. Fonctions méromorphes

Un ensemble $P \subset \mathbb{C}$ est *discret* si tous ses points sont isolés dans P, *i.e.* si, pour tout $a \in P$, il existe $r > 0$ tel que $D(a,r) \cap P = \{a\}$.

Lemme 6.4.1. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et P un fermé de Ω. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *P est discret.*

2. *P n'a pas de point d'accumulation dans Ω.*
3. *Pour tout compact K contenu dans Ω, $P \cap K$ est fini.*

Démonstration. — Si a est un point d'accumulation de P dans Ω, $a \in P$ puisque P est fermé dans Ω ; c'est donc un point de P non isolé dans P : (1) $\Rightarrow$ (2).

Si P n'a pas de point d'accumulation dans Ω, et si $K \subset \Omega$, $P \cap K$ n'a pas de point d'accumulation dans K. Mais toute partie infinie d'un compact a un point d'accumulation dans ce compact : (2) $\Rightarrow$ (3).

Supposons (3). Soit $a \in P$. Pour tout $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, $P \cap \overline{D}(a,r)$ est fini, donc $P \cap D(a,r) = \{a\}$ si r est assez petit : (3) $\Rightarrow$ (1).

□

Définition 6.4.2. — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une *fonction méromorphe f sur Ω* est une fonction définie et holomorphe sur un ouvert $\Omega \setminus P(f)$ telle que :

1. $P(f) \subset \Omega$ est un ensemble discret, fermé dans Ω ;
2. tout $a \in P(f)$ est une singularité polaire de f.

Les éléments de $P(f)$ sont les *pôles* de f. On note $\mathcal{M}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions méromorphes sur Ω.

Rappelons une caractérisation très importantes des singularités non-essentielles :

Lemme 6.4.3. —
1) *Une fonction $f \in \mathcal{O}(D(a,r) \setminus \{a\})$ est méromorphe sur $D(a,r)$ si et seulement si elle admet un dévelopement de Laurent sur $D(a,r) \setminus \{a\}$ de la forme*

$$f(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} a_n (z-a)^n \quad \text{avec } p \in \mathbb{Z}\,.$$

2) *i) Si $p \geq 0$, la singularité est éliminable et le développement de Laurent est le développement de Taylor du prolongement holomorphe de la fonction f.*
ii) Si $p < 0$ et $a_p \neq 0$, le point a est un pôle.
3) *La fonction f admet une singularité polaire d'ordre $m \geq 1$ si et seulement s'il existe des nombres complexes $a_{-m}, \ldots, a_{-1}$ (uniques, avec $a_{-m} \neq 0$) tels que la fonction*

$$D(a,r) \setminus \{a\} \ni z \mapsto f(z) - \sum_{-m \leq i \leq -1} a_i (z-a)^i$$

admette en a une singularité éliminable.

Démonstration. —
1) Si a est une singularité éliminable, la fonction $\hat{f}$ qui est le prolongement par continuité de f en a est holomorphe sur $D(a,r)$. Elle admet un développement en série de entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ sur $D(a,r)$. Cela montre le lemme dans ce cas.

2) La singularité isolée a est polaire pour une fonction $f \in \mathcal{O}(D(a,r) \setminus \{a\})$ si elle n'est pas éliminable et s'il existe une fonction $\hat{g} \in \mathcal{O}(D(a,r))$ et un entier $p \geq 1$, tels que $\hat{g}(a) \neq 0$ et $f(z) = \hat{g}(z)/(z-a)^p$ pour tout $z \in D(a,r)$. Comme $\hat{g}$ est holomorphe sur $D(a,r)$ elle est égale à la somme de sa série de Taylor en a : $\hat{g}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z-a)^n$.

Donc sur $D(a,r) \setminus \{a\}$,

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{+\infty} b_{n+p}(z-a)^n = \sum_{n=-p}^{+\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=-p}^{-1} a_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n .$$

□

Théorème 6.4.4. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. L'ensemble $\mathcal{M}(\Omega)$ est naturellement un anneau commutatif unitaire. Si de plus Ω est connexe, c'est un corps.*

Démonstration. — Soit f et g deux fonctions méromorphes sur Ω. Les fonctions $s := f + g$ et $p := fg$ sont définies sur $\Omega \setminus P$, où $P = P(f) \cup P(g)$ est un fermé de Ω discret. Soit $a \in P$. Par définition des singularités isolées au plus polaires, *i.e.* polaires ou éliminables, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que a soit une singularité éliminable de $(z-a)^q f$ et $(z-a)^q g$. On en déduit que a est une singularité (isolée) au plus polaire de s et p. Si a est une singularité éliminable de s (respectivement de p), on prolonge s (respectivement p) en a par continuité. Ceci étant fait pour tout $a \in P$, on obtient des fonctions méromorphes sur Ω. La première partie de l'énoncé en résulte assez immédiatement.

Si de plus Ω est connexe et $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, on remarque d'abord que $\Omega \setminus P(f)$ est aussi un ouvert connexe (démonstration ?). On en déduit que, si f n'est pas la fonction nulle, f n'a que des zéros d'ordre fini et que l'ensemble $Z(f)$ de ses zéros est discret. La fonction $1/f$, définie sur $\Omega \setminus (Z(f) \cup P(f))$ a des singularités polaires en tout point de $Z(f)$ et des singularités éliminables en tout point de $P(f)$. Après « élimination des singularités éliminables », on obtient un inverse de f pour le produit. □

Remarque 6.4.5. — Si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$, alors au voisinage de tout point $a \in \Omega$, f s'écrit comme quotient de deux fonctions holomorphes. En fait ce résultat est global : si Ω est connexe, alors $\mathcal{M}(\Omega) = \operatorname{Frac} \mathcal{O}(\Omega)$. Ce théorème sera établi dans le cours de LM368.

Exercice 6.4.6. — Montrer que la dérivée d'une fonction méromorphe f (définie en dehors de $P(f)$) est naturellement une fonction méromorphe.

Si $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ et $a \in \Omega$, on voit, par exemple en écrivant le développement de Laurent de f, qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$, uniquement défini, tel que :

$$f(z) = (z-a)^p h(z) \tag{39}$$

au voisinage de a et que a ne soit ni un pôle ni un zéro de h. Si $p > 0$, f a un zéro d'ordre p en a, et si $p < 0$, f a un *pôle d'ordre $-p$ en a* (c'est une définition). On dit aussi *multiplicité* au lieu d'ordre. Posons :

$$\mu_a(f) := p.$$

Lemme 6.4.7. — *Avec ces notations, on a :*

$$\mu_a(fg) = \mu_a(f) + \mu_a(g), \qquad \mu_a(1/f) = -\mu_a(f).$$

Démonstration. — Elle est laissée au lecteur. □

Plus généralement, on a la définition suivante :

Définition 6.4.8. — Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $a \in \mathbb{C}$. On appelle *multiplicité de f en a* l'ordre de a comme zéro de $f - f(a)$.

Concernant le calcul des résidus, en général, il s'agira de calculer le résidu en un point $a \in \mathbb{C}$ d'une fonction de la forme $f = g/h$, où g et h sont holomorphes au voisinage de a et $h(a) = 0$. Le résidu s'obtient alors en faisant un développement limité de g et h au point a, à l'ordre convenable. Il y a un cas simple qui vaut la peine d'être retenu :

Lemme 6.4.9. — *Si g et h sont holomorphes au voisinage de a, si $g(a) \neq 0$, et si h a un zéro simple en a, alors :*

$$\text{Rés}\,(\frac{g}{h}, a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Démonstration. — En effet, on a $h(z) = (z - a)H(z)$, avec $H(a) = h'(a) \neq 0$. D'où :

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(a)}{h'(a)} \frac{1}{z - a} + O(1).$$

□

Pour un pôle d'ordre m, le résidu se calcule en faisant un développement limité de $(z-a)^m f(z)$ à l'ordre $m - 1$, ou encore par la formlule de Taylor :

$$\text{Rés}(f, a) = \lim_{z \to a} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{m-1} [(z - a)^m f(z)]\,.$$

6.5. Application à des calculs classiques d'intégrales

Nous illustrons la méthode sur des exemples simples.

***Exemple 6.5.1* (Abel)**. — Soient P et Q deux polynômes tels que $\deg P \leq \deg Q - 2$. Supposons que les racines de Q soient simples. Alors

$$\sum_{a \text{ tel que } Q(a)=0} \frac{P(a)}{Q'(a)} = 0\,.$$

En effet, l'inégalité sur les degrés implique qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout R assez grand, on ait, pour tout $u \in C(0, R)$: $\left|\frac{P}{Q}(u)\right| \leq \frac{C}{R^2}$. On a alors $\left|\int_{C(0,R)} \frac{P}{Q}(u)du\right| \leq 2\pi R \frac{C}{R^2}$, donc $\lim_{R \to +\infty} \left|\int_{C(0,R)} \frac{P}{Q}(u)du\right| = 0$. Le théorème des résidus permet de conclure.

Par exemple pour $Q(z) = z^n - 1$, on obtient $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(e^{\frac{2ik\pi}{n}})e^{\frac{2ik\pi}{n}} = 0$, si $\deg P \leq n-2$. Formule que l'on sait démontrer directement sur chaque monôme.

Exercice 6.5.2. — Calculer l'intégrale :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)/Q(t)\, dt,$$

où P, Q sont deux polynômes, Q n'a pas de zéro réel et $\deg Q \geq \deg P + 2$.

Solution. — Puisque Q n'a pas de zéro réel, la fonction $t \mapsto P(t)/Q(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, et puisque $\deg Q \geq \deg P + 2$, on peut choisir $R > 0$ et $C > 0$ tels que :

$$|z| \geq R \Rightarrow |P(z)/Q(z)| \leq C|z|^{-2}.$$

Les hypothèses sont donc les hypothèses qu'il faut faire pour que I soit, au choix, une intégrale de Lebesgue bien définie ou une intégrale de Riemann généralisée absolument convergente.

Étant donné $r > 0$, on introduit le chemin :

$$0 \leq t \leq \pi, \qquad c_r(t) = r\mathrm{e}^{it},$$

le segment orienté $[-r, +r]$ et le lacet l_r obtenu en suivant le segment $[-r, +r]$ puis l'arc c_r. Soit $\{a_1, \ldots, a_N\}$ l'ensemble des zéros de Q et $R_0 > \max_{k=1,\ldots,N} |a_k|$. On peut supposer que $a_1, \ldots, a_M$, ont des parties imaginaires > 0, et $a_{M+1}, \ldots, a_N$ des parties imaginaires < 0. Si $r \geq R_0$, l'intégrale de Cauchy de P/Q sur l_r est bien définie. L'indice de a_k par rapport à l_r est nul si $\operatorname{Im} a_k < 0$, et vaut $+1$ si $\operatorname{Im} a_k > 0$. On en déduit :

$$\int_{l_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{M} \text{ Rés}\,(\frac{P}{Q}, a_k),$$

quel que soit $r \geq R_0$. D'autre part, on a :

$$\int_{l_r} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = \int_{-r}^{+r} \frac{P(t)}{Q(t)}\, dt + \int_{c_r} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz.$$

Si $r \geq R$,

$$\left| \int_{c_r} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| \leq \pi r \times (C/r^2),$$

tend vers 0 quand $r \to +\infty$. Finalement :

$$2i\pi \sum_{k=1}^{M} \text{ Rés}\,(\frac{P}{Q}, a_k) = \lim_{r \to +\infty} \int_{l_r} \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = \lim_{r \to +\infty} \int_{-r}^{+r} \frac{P(t)}{Q(t)}\, dt = I.$$

Par exemple, on calcule :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^2} = \pi.$$

□

Exercice 6.5.3. — Calculer
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \cos t}\, dt.$$

La méthode s'applique au calcul de $\displaystyle\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt$, où $R(x,y)$ est une fraction rationnelle en (x,y) dont le dénominateur ne s'annule pas pour $x^2 + y^2 = 1$.

Solution. — On écrit $\cos t = (\mathrm{e}^{it} + \mathrm{e}^{-it})/2$, d'où :
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{2\mathrm{e}^{it}}{4\mathrm{e}^{it} - (\mathrm{e}^{2it} + 1)} dt = 2i \int_{\partial D(0,1)} \frac{1}{z^2 - 4z + 1}\, dz.$$
La fonction rationnelle $z \mapsto 1/(z^2 - 4z + 1)$ a deux pôles $a_\pm = 2 \pm \sqrt{3}$; a_- appartient au disque unité, mais pas a_+. Le résidu au point a_- est $1/(2a_- - 4)$. On a donc :
$$I = 2\pi/\sqrt{3}.$$

□

6.6. Les théorèmes de l'indice

On énonce quelques résultats importants dans le cas, le plus utile, d'un disque.

***Théorème 6.6.1* (Théorème de l'indice).** — *Soit f une fonction holomorphe sur un voisinage ouvert de $\overline{D}(a,r)$. On suppose que f ne s'annule pas sur le cercle $\partial D(a,r)$. Alors, l'intégrale de Cauchy :*
$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$
est égale au nombre des zéros de f dans $D(a,r)$, comptés avec leurs multiplicités. Elle est aussi égale à l'indice de 0 par rapport au lacet :
$$t \in [0,1], \qquad c(t) = f(a + r\mathrm{e}^{i2\pi t}).$$

Démonstration. — Soit $a_1, \ldots, a_N$, les zéros de f dans $D(a,r)$, d'ordres respectifs $n_1, \ldots, n_N$. On a :
$$k = 1, \ldots, N, \qquad f(z) = (z - a_k)^{n_k} F_k(z),$$
où F_k est holomorphe et $F_k(a_k) \neq 0$, donc :
$$f'(z) = (z - a_k)^{n_k} F_k'(z) + n_k (z - a_k)^{n_k - 1} F_k(z),$$
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{F_k'(z)}{F_k(z)} + \frac{n_k}{z - a_k}\ .$$
Le premier terme est holomorphe au voisinage de a_k, donc :
$$\text{Rés}\,(f'/f, a_k) = n_k.$$
La formule des résidus, appliquée à la fonction f'/f, donne le premier résultat.

Le deuxième est une conséquence directe des définitions :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}\,(c,0) &= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{c'(t)}{c(t)}\,dt = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f'(a+r\mathrm{e}^{it})}{f(a+r\mathrm{e}^{it})}ir\mathrm{e}^{it}\,dt\\ &= \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,r)}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.\end{aligned}$$

□

Corollaire 6.6.2. — *Soit f une fonction holomorphe non constante sur Ω, un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soient $z_0 \in \Omega$ et $w_0 = f(z_0)$. Soit m la multiplicité du zéro de $f(z) - w_0$ en z_0. Il existe des ouverts $V \ni z_0$, $W \ni w_0$ tels que $f(V) = W$ et pour tout $w \in W \setminus \{w_0\}$, l'équation $f(z) = w$ a exactement m racines distinctes dans V. En particulier, f est une application ouverte.*

Démonstration. — Comme f est non constante, il existe $r > 0$ telle que $0 < |z - z_0| < 2r \Rightarrow f'(z) \neq 0$ et $f(z) \neq f(z_0)$.

Soit $c : [0, 2\pi] \ni t \mapsto z_0 + re^{it}$ une paramétrisation du cercle $\partial D(a, r)$ et $\Gamma = f \circ c$.

Soit W la composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \langle\Gamma\rangle$ qui contient w_0 (W est bornée car $\mathrm{Ind}(\Gamma, w_0) = m \neq 0$).

Pour $w \in W$, l'indice $\mathrm{Ind}(\Gamma, w)$ est constant égal à $\mathrm{Ind}(\Gamma, w_0) = m > 0$. Par le théorème de l'indice, c'est aussi le nombre de zéros de $f - w$ contenus dans $D(a, r)$, donc dans $D(a, r) \cap f^{-1}(W)$. Ceci entraîne que $f : V = D(z_0, r) \cap f^{-1}(W) \to W$ est surjective. Comme $f'(z) \neq 0$ pour $z \in D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, les racines de $z \mapsto f(z) - w$ sont simples. □

Corollaire 6.6.3. —
1) *Si une fonction holomorphe f est injective alors f' ne s'annule pas.*
2) *Si $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ est une application holomorphe bijective entre deux ouverts alors f est un difféomorphisme et la fonction réciproque $f^{-1} : \Omega_2 \to \Omega_1$ est holomorphe.*

Démonstration. — On montre la contraposée du premier point en utilisant le théorème précédent. Pour le second, on note que f est ouverte, c'est donc un homéomorphisme. Le premier point entraine que f' ne s'annule pas. Montrons que f^{-1} est holomorphe : soit $y_0 = f(z_0) \in \Omega_2$.

$$\lim_{y\to f(z_0)}\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(z_0))}{y - f(z_0)} = \lim_{u=f^{-1}(y)\to z_0}\frac{u - z_0}{f(u) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}\,.$$

Ce qui montre que f^{-1} est analytique en particulier f est un difféomorphisme. □

Nous donnerons plus bas une formule pour f^{-1}.

Donnons une version du théorème de l'indice pour des fonctions méromorphes.

Théorème 6.6.4. — *Soit f une fonction méromorphe dans un ouvert non vide Ω, n'ayant qu'un nombre fini de zéros $a_1, \ldots, a_n$ (comptés avec multiplicités) et un nombre fini de pôles $b_1, \ldots, b_m$ (comptés avec multiplicités) dans Ω. Soit c un chemin fermé homotope à un point dans Ω, ne passant par aucun des zéros ou des pôles de f. Soit g une fonction holomorphe dans Ω. Alors*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_c g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{n} g(a_i)\mathrm{Ind}(c, a_i) - \sum_{j=1}^{m} g(b_j)\mathrm{Ind}(c, b_j)\,.$$

En particulier pour la fonction $g = 1$,

$$\mathrm{Ind}(f \circ c, 0) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ind}(c, a_i) - \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Ind}(c, b_j)\,.$$

Démonstration. —
Un résidu logarithmique est un résidu associé à une fonction méromorphe du type $\frac{f'}{f}$ qui est la dérivée logarithmique de la fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Les pôles de la dérivée logarithmique sont contenus dans la réunion de l'ensemble des zéros et des pôles de f : si $a \in P(f) \cup Z(f)$, au voisinage W de a, la fonction f s'écrit $f(z) = h(z)(z-a)^m$ avec $m \in \mathbb{Z}^*$ et h holomorphe, non nulle sur W si W assez petit. Donc

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{(z-a)} + \frac{h'(z)}{h(z)}\,.$$

Le second terme est holomorphe sur W. Donc la partie principale de la dérivée logarithmique $\frac{f'}{f}$ en a est $\frac{m}{(z-a)}$, de résidu m.

Si $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, sur W comme ci-dessus, on a

$$g(z)\frac{f'(z)}{f(z)} = g(z)\frac{m}{(z-a)} + g(z)\frac{h'(z)}{h(z)} = g(a)\frac{m}{(z-a)} + H(z)\,.$$

avec H une fonction holomorphe au voisinage de a. □

Exemple 6.6.5. —
1) Si f est méromorphe sur un voisinage ouvert de $\overline{D(a,r)}$ est telle que $[P(f) \cup Z(f)] \cap C(a,r) = \emptyset$, alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sharp Z(f) \cap D(a,r) - \sharp P(f) \cap D(a,r) = \sum_{a \in (Z(f) \cup P(f)) \cap D(a,r)} \mu(a)\,.$$

Donc la notation $\sharp$ dit que les éléments sont comptés avec multiplicités. Avec la notation de (39) :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,r)} z^k \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a \in (Z(f) \cup P(f)) \cap D(a,r)} \mu(a) a^k\,.$$

Si f ne prend pas la valeur w sur $C(a,r)$, $Z(f-w)$ est l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = w$ et $P(f-w) = P(f)$. On obtient une formule donnant les fonctions de Newton des racines de l'équation $f - w = 0$.

2) En particulier, avec les notations du corollaire précédent, si f est holomorphe sur $D(z_0, 2r)$ est telle que f' est non nulle hors de z_0. Si $w \in W$, notons $z_1(w), \ldots, z_m(w)$ les $m-$racines (distinctes si $w \neq f(z_0)$) de l'équation $f(z) = w$. Alors

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,r)} z^k \frac{f'(z)}{f(z)-w}dz = z_1(w)^k + \ldots + z_m(w)^k\,.$$

Les fonctions de Newton $w \to N_k(w) = z_1(w)^k + \ldots + z_m(w)^k$ des racines de l'équation $f - w = 0$ sont donc holomorphes car données par une intégrale à paramétre holomorphe.

3) Lorsque $k = 1$ et $m = 1$, f est un difféomorphisme local d'inverse la fonction $f^{-1} : W \to V$ explicitement donnée par la formule intégrale suivante :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,r)} z\frac{f'(z)}{f(z)-w}dz = z_1(w) = f^{-1}(w)\,.$$

4) On peut aussi changer la forme du domaine de départ : Si $f : V \to W$ est un biholomorphisme, soit $\overline{D(a,\epsilon)} \subset W$ alors $f^{-1}_{|f(D(a,\epsilon))} : f(D(a,\epsilon)) \to D(a,\epsilon)$ est donnée par

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{C(a,\epsilon)} z\frac{f'(z)}{f(z)-w}dz = z_1(w) = f^{-1}(w)\,.$$

Donnons encore une application de la formule de l'indice.

***Théorème 6.6.6* (Rouché).** — *Soient f et g deux fonctions holomorphes dans Ω telles que f (resp. g) n'ait qu'un nombre fini de zéros, $a_1, \ldots, a_n$ (resp. $b_1, \ldots, b_m$) dans Ω, comptés avec leur multiplicité. Soit c un chemin fermé homotope à un point dans Ω. On suppose que :*

$$|g(z) - f(z)| < |f(z)| \quad \textit{pour tout } z \in \langle c\rangle.$$

(Donc f et g ne s'annulent pas sur $\langle c\rangle$.) Alors

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Ind}(c,a_i) = \sum_{j=1}^{m}\mathrm{Ind}(c,b_j).$$

En particulier si $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$ et c paramètre $\partial D(a,r)$ dans le sens direct alors

$$\sharp(Z(f)\cap D(a,r)) = \sharp(Z(g)\cap D(a,r))\,.$$

Démonstration. — D'après le théorème de l'indice, on a :

$$\mathrm{Ind}(f\circ c, 0) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Ind}(c,a_i) \text{ et } \mathrm{Ind}(g\circ c,0) = \sum_{j=1}^{m}\mathrm{Ind}(c,b_i).$$

Il s'agit donc de montrer que que $\mathrm{Ind}(f\circ c,0) = \mathrm{Ind}(g\circ c,0)$, à l'aide de l'inégalité : $|f\circ c - g\circ c| < |f\circ c|$; c'est une conséquence du lemme 5.1.11 qui montre que les deux lacets $f\circ c$ et $g\circ c$ sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$. □

Pour constater l'importance de ce théorème, contentons-nous d'une preuve très courte du théorème de d'Alembert-Gauss :

Corollaire 6.6.7. — *Soit $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ une application polynomiale dans $\mathbb{C}$. Alors P possède exactement n zéros, comptés avec multiplicité. Autrement dit, P est un produit de polynômes de degré 1.*

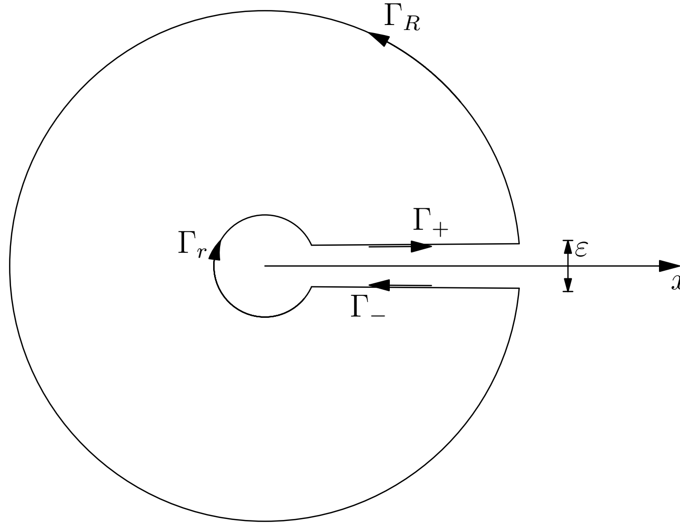
Démonstration. — On suppose $a_n \neq 0$. Vu que $\lim_{|z|\to+\infty}\frac{P(z)-a_nz^n}{a_nz^n} = 0$, il existe $R > 0$ tel que, pout tout $z \in C(0,R)$, $|a_nz^n - P(z)| < |a_nz^n|$. Le théorème de Rouché implique alors que les deux fonctions $z \mapsto a_nz^n$ et $z \mapsto P(z)$ ont le même nombre de zéros, comptés avec multiplicité, dans le disque $D(0,R)$, c'est-à-dire n. □

6.7. Quelques calculs d'intégrales

Exemple 6.7.1. — Calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{Q(x)}{x^\alpha} dx$, avec $\alpha \in]0,1[$ et Q une fraction rationnelle sans pôles sur la demi-droite $\mathbb{R}_+$. On se place bien sûr dans le cas où cette intégrale est convergente, donc $Q(x) = O(\frac{1}{x})$ en $\pm\infty$.

Commençons par choisir une détermination holomorphe du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$: choisissons $\log z = i\pi + \mathrm{Log}\,(-z)$, où Log est la détermination principale du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Lorsque $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ nous allons donc noter ici $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$.

On va calculer $\int_\Gamma \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz$, où Γ est le chemin suivant :



Décomposons le chemin Γ en Γ_R, Γ_-, Γ_r et Γ_+ comme ci-dessus. Alors

$$\int_\Gamma \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz = \int_{\Gamma_R} \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz + \int_{\Gamma_r} \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz + \int_{\Gamma_-} \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz + \int_{\Gamma_+} \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz.$$

Fixons d'abord R et r. Lorsque ε tend vers 0, on vérifie aisément que

$$\int_{\Gamma_-} \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz + \int_{\Gamma_+} \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz$$

tend vers $(1 - e^{-2\pi i\alpha}) \int_r^R \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz$ (car $|z^\alpha| = |z|^\alpha$).

On majore facilement les intégrales $\int_{\Gamma_R} \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz$ et $\int_{\Gamma_r} \frac{Q(z)}{z^\alpha} dz$, qui tendent vers 0 lorsque r tend vers 0 et R tend vers $+\infty$.

L'ouvert $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ étant simplement connexe (en effet, il est étoilé par rapport à -1), la formule des résidus donne :

$$(1 - e^{-2\pi i\alpha}) I = 2i\pi \sum_{\omega \text{ pôle de } Q} \mathrm{Rés}(\frac{Q(z)}{z^\alpha}, \omega).$$

Par exemple, on trouve : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha(1+x)}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$, lorsque $0<\alpha<1$.

On peut appliquer la même méthode pour calculer l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}Q(x)\ln x dx$, sous les mêmes hypothèses sur Q.

Cependant, l'intégrale de $Q(z)\log z$ sur le chemin Γ, comme dans l'exemple précédent, mène à la formule (élégante, quoique peu utile) $0=0$. L'astuce consiste à intégrer la fonction $Q(z)(\log z)^2$ sur ce chemin.

Un autre exemple d'application du calcul des résidus :

Exemple 6.7.2. — Soit $f\in\mathcal{O}(\mathbb{C})$ une fonction entière telle qu'il existe $M>0$ et $\tau>0$ vérifiant

$$\forall z\in\mathbb{C}\,,\ |f(z)|\le Me^{\tau|Imz|}\,.$$

Alors, si $\sigma>\tau$, et $\sigma z\notin\mathbb{Z}\pi$,

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}f(\frac{n\pi}{\sigma})\frac{\sin\sigma(z-\frac{n\pi}{\sigma})}{\sigma(z-\frac{n\pi}{\sigma})}:=\lim_{k\to+\infty}\sum_{|n|\le k}f(\frac{n\pi}{\sigma})\frac{\sin\sigma(z-\frac{n\pi}{\sigma})}{\sigma(z-\frac{n\pi}{\sigma})}\ (*)$$

(la série est donnée comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{|i|\le n}\ldots$).

C'est à dire qu'une telle fonction se reconstruit à partir de l'échantillon $\{f(\frac{n\pi}{\sigma}),\ n\in\mathbb{Z}\}$.

En fait la formule est valable aussi pour les points $\sigma z\in\pi\mathbb{Z}$.

On notera que l'écart entre les points de l'échatillon est inversement proportionel à l'ordre de croissance de la fonction.

Cette formule montre aussi qu'une fonction dont la croissance est controlée par $e^{\tau|Im(z)|}$ ne peut s'annuler sur toute une suite de réels en progression arithmétique $\{a+rn,\ n\in\mathbb{Z}\}$ de raison $0<r<\frac{\pi}{\tau}$.

Une telle fonction se rencontre lorsque l'on étudie la transformée de Fourier d'une fonction g intégrable et de support contenu dans$[-\tau,\tau]\ \subset]-\sigma,\sigma[$ (i.e. g est nulle presque partout sur $\mathbb{R}\setminus[-\tau,\tau]$. Alors sa transformée de Fourier est $z\to f(z)=\displaystyle\int_{\mathrm{R}}g(t)e^{itz}dt$. L'intégrale est en fait sur $[-\tau,\tau]$. On voit facilement que cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (développer l'exponentielle en série, montrer qu'il y a convergence dominée en utilisant que g est intégrable, donc on peut commuter série et intègrale). De plus $|f(z)|\le e^{\tau|Imz|}\displaystyle\int_{[-\tau,\tau]}|g(t)|dt$.

Démonstration. —

1) Montrons que pour tout $\varepsilon>0$, il existe une constante $C(\varepsilon)>0$ telle que tout nombre complexe z on ait

$$\forall\, n\in\mathbb{Z},\ |z-n\pi|\ge\varepsilon\Rightarrow|\sin z|\ge C(\varepsilon)e^{|Im(z)|}\,.$$

La fonction $z \mapsto e^{-|Imz|}|\sin z|$ est continue sur $\mathbb{C}$ et $2\pi-$périodique. Sur la bande $B = \{-\pi \leq Re(z) \leq \pi\}$, on a

$$\lim_{|z|\to+\infty} e^{-|Imz|}|\sin z| = \lim_{|y|\to+\infty} e^{-|y|}|\sin(x+iy)| = \frac{1}{2}\,.$$

(car

$$|\sin(x+iy)|^2 = \frac{1}{4}(e^{ix-y} - e^{-ix+y})(e^{-ix-y} - e^{ix+y}) = \frac{1}{4}(e^{-2y} + e^{2y} - e^{-2ix} - e^{2ix})\,.$$

Donc $e^{-2|y|}|\sin(x+iy)|^2 = \dfrac{1}{4}(1 + e^{-4|y|} - e^{-2|y|}2\cos 2x))$.

Il existe $R > 0$ tel que $|Imz| > R$ et $z \in B$ entraine $e^{-|Imz|}|\sin z| \geq \dfrac{1}{4}$. Mais sur le compact $\{z \in B,\ |Imz| \leq R, |z - n\pi| \geq \varepsilon\}$, la fonction $z \mapsto e^{-|Imz|}|\sin z|$ est strictement positive, donc minorée par une constante $C_1(\varepsilon) > 0$. On pose $C_\varepsilon = \min(C_1(\varepsilon), \dfrac{1}{4})$.

On conclut par périodicité : Si $z \in \mathbb{C} \setminus \cup_{n\in\mathbf{Z}} D(n\pi, \varepsilon)$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ telle que $z - 2\pi k \in B \setminus D(0, \varepsilon)$. Donc $e^{-|Imz|}|\sin z| = e^{-|Im(z-2\pi k)|}|\sin(z - 2\pi k)| \geq C(\varepsilon)$.

2) On note $\gamma_n = \{z \in \mathbb{C}\,,\, |z| = (n + \dfrac{1}{2})\dfrac{\pi}{\sigma}\}$. D'après 1), $\exists m > 0$ tel que $|\sin \sigma z| \geq m e^{\sigma|Imz|}$ si $z \in \gamma_n$

3) Soit $|z| < (n + \dfrac{1}{2})\dfrac{\pi}{\sigma}$, $\sigma z \notin \mathbb{Z}\pi$. Le théorème des résidus donne

$$I_n(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\sin \sigma\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{f(z)}{\sin \sigma z} - \sum_{|i|\leq n} \frac{(-1)^i f(i\frac{\pi}{\sigma})}{\sigma(z - i\frac{\pi}{\sigma})}\,.$$

En effet, pour un tel z fixé, la fonction $g : u \mapsto \dfrac{f(u)}{\sin \sigma u}\dfrac{1}{u - z}$ est méromorphe au voisinage du disque $\overline{D(0, (n + \frac{1}{2})\pi)}$, de pôle simple en $\dfrac{i\pi}{\sigma}$, $|i| \leq n$, et en z. Les résidus sont $\text{Rés}(g, \dfrac{i\pi}{\sigma}) = -\dfrac{(-1)^i f(i\frac{\pi}{\sigma})}{\sigma(z - i\frac{\pi}{\sigma})}$ et $\text{Rés}(g, z) = \dfrac{f(z)}{\sin \sigma z}$. Comme le disque fermé admet un voisinage convexe et que l'indice de γ_n par rapport aux pôles envisagés est 1, le théorème des résidus donne la formule.

3) Montrons que $\lim_{n\to+\infty} I_n(z) = 0$. On en déduira la formule d'interpolation $(*)$.

Choisissons n tel que $(n + \dfrac{1}{2})\dfrac{\pi}{\sigma} \geq |z|$. Sur γ_n, $|f(\zeta)| \leq M e^{\tau|Im\zeta|}$; d'aprés le premier point, sur γ_n, $|\sin \sigma\zeta| \geq m e^{|\sigma Im\zeta|}$. Donc

$$|I_n(z)| \leq \frac{M}{2\pi m}\int_0^{2\pi} e^{-(\sigma-\tau)(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\sigma}|\sin t|}\frac{(n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\sigma}}{(n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\sigma} - |z|}dt\,.$$

On a paramétré γ_n par $t \mapsto (n + \dfrac{1}{2})\dfrac{\pi}{\sigma}e^{it}$. D'où

$$|I_n(z)| \leq 4\frac{M(n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\sigma}}{2\pi((n + \frac{1}{2})\frac{\pi}{\sigma} - |z|)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\sigma-\tau)(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\sigma}\frac{2}{\pi}t}dt$$

$$= \frac{2M}{m((n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\sigma} - |z|)(\sigma - \tau)}(1 - e^{-(\sigma-\tau)(n+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\sigma}})$$

(on utilise la concavité du sinus sur $[0, \frac{\pi}{2}]$). On a bien $\lim_{n\to+\infty} I_n(z) = 0$ on déduit la formule demandée car $(-1)^n \sin\sigma z = \sin\sigma(z - \frac{n\pi}{\sigma})$. □